

王　潼著

热势论

科学出版社

热 势 论

王 潼 著

科 学 出 版 社

1 9 8 0

内 容 简 介

本书系统地介绍了各种热势的性质，以及它们在传热学中的应用，并在函数空间 $B^{(n,\lambda)}$ 的意义下，讨论了二阶抛物型方程的各种定解问题．可供数学、力学、物理专业的研究人员，及高等院校相应专业师生阅读．

热 势 论

王 潼著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1980 年 5 月第 一 版　开本：787×1092　1/32

1980 年 5 月第一次印刷　印张：6 3/4

印数：0001—6,920　字数：152,000

统一书号：13031·1248

本社书号：1739·13—1

定价：0.85 元

序　　言

偏微分方程（数学物理方程）是应用数学的一个重要分支．在近代数理方程的研究中，明显地看出两种不同的方向：一方面，生产实践和科学实验中不断提出大量的新的微分方程课题(如非均匀介质问题、不适定问题、控制问题及各种非线性问题)，它们大大丰富了古典微分方程理论的内容，使之获得了新的生命；另一方面，使用较抽象的数学方法(泛函、代数等方法)研究微分方程，可以建立系统的一般性的理论,在这种理论中，当已知条件固定时，所获得的结果往往是不可以再改善的，同时，为了保证一定的结果,所需要的条件往往是不可能再降低的．

本书中,作者尝试"以热势为纲",系统地叙述抛物型方程的某些结果,并建立较完整的理论．

长期以来,抛物型方程的研究,受到椭圆型方程研究的启发和影响．作者也遵循了"学椭圆、搞抛物"的方针．然而,在考虑两种方程的共同点的同时，作者还特别注意了两者的实质性差别．

热传导方程是最典型的抛物型方程．传热过程是不可逆过程，在此过程中，时间和空间变量是不等价的．由此出发，可以找到一个函数空间 $B^{(n,\lambda)}$，它恰当地描写了抛物型方程的各种性质,它的作用,犹如在研究椭圆型方程时使用的函数空间 $C^{(n,\lambda)}$．

本书共分两部分：第一部分是较完善的热势理论；第二部分中，用热势论处理了抛物型方程的一些定解问题．

在第一部分里，首先对物理热源进行了数学分类（第一章），并研究了热势的一般性质(第二章)．热势的光滑性是在 $B^{(n,\lambda)}$ 空间中讨论的（第五章）．细腻地分析热源作用处的温度变化情况，得到了十分重要的结果：热势的直接值具有增滑作用(第六章)．

在第二部分里，建立了 $B^{(n,\lambda)}$ 空间的一系列内插估值（第二章)，在它们的帮助下，采用先验估计的方法，获得了变系数抛物型方程的 $B^{(n,\lambda)}$ 估值(第一、二章)，它完全类似于椭圆型方程的 Schauder 估值．在最后一章里，讨论了带有间断系数的抛物型方程的一些定解问题．

许多作者，如 Gevrey, Nirenberg, Выборны, Ciliberto, Friedman, Камынин 和 Тихонов 等，在抛物型方程方面做了很多出色的工作[1]，他们的结果，本书中略有介绍．

为了清晰起见，本书中只讨论了一个空间变量的情形．本书的所有结果，都已经推广到多个空间变量的情形[2]．

本书是 1973 年夏天脱稿的．在写作过程中，中国科学院数学研究所关肇直同志和吴新谋同志给了多方面的帮助和热情的鼓励，中国科学院理论物理研究所郝柏林同志，复旦大学李大潜同志、北京大学姜礼尚同志，阅读了有关的章节，提出了宝贵的意见．作者在此对他们表示衷心的感谢．

王　潼

1979.3.

1) 见参考文献 [3] 至 [11]．
2) 见参考文献 [12] 至 [18]．

目录

第二部分　热势论在数学物理中的应用

第一部分　热势论基础

第一章　热传导和热势

第一节　各种热传导问题

§1　有关热传导的一些知识

热传导是一种常见的物理现象，其宏观描述是以下述物理概念和实验定律为基础的. 为简便计，只讨论均匀杆状物体，并假定杆足够细，因之，它的各个横截面上所有点的温度都一样.

设 s 是杆的横截面积，ρ 是它的密度，c 是它的比热. 由于杆是均匀的，s、ρ 和 c 都是常数. 把长为 Δx 一小段杆的温度提高 Δu 时所需要的热量为

$$\Delta Q = c\rho s\Delta x\Delta u. \tag{1.1}$$

杆上的温度 $u(x,t)$ 是空间变量 x 和时间变量 t 的函数. 当杆上温度不均匀时，热量便从较高处传向温度较低处，即杆中产生热流. 傅立叶根据实验得到了下面的定律：在 Δt 时间内，流经截面 x 的热量是

$$\Delta Q = -ds\Delta t\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \tag{1.2}$$

其中 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 是杆上 x 截面处的温度梯度，d 是导热系数.

在杆内有热源存在时，引入热源强度的概念：单位时间内单位体积杆中产生(或吸收)的热量叫热源强度.

设热源强度 $F(x,t)$ 为连续函数，则在 t 到 $t+\Delta t$ 时间段内，从 x 到 $x+\Delta x$ 一段杆上得到的热量可以写成

$$\Delta Q = s\Delta x\Delta t F(x, t). \tag{1.3}$$

§2 热传导方程

讨论一小段杆 Δk，其左端点为 x_1，右端点为 x_2.

在时刻 t_i，杆上的温度为 $u(x,t_i)$，$i=1,2$. 从时刻 t_1 到时刻 t_2，杆的温度提高了

$$\Delta u = u(x,t_2) - u(x,t_1).$$

按照式(1.1)，把 Δk 的温度提高 Δu 时所需要的热量为

$$Q_1 = c\rho s\int_{x_1}^{x_2}[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]d\xi;$$

另一方面，根据式(1.3)，Δk 上热源放出热量为

$$Q_2 = s\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}F(\xi,\tau)d\xi d\tau;$$

最后，考察 Δk 两端热量流动情况. 依据式(1.2)，从 t_1 到 t_2 时间段内，流经 x_1 截面的热量为

$$Q_3 = -ds\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}d\tau,$$

流经 x_2 截面的热量为

$$Q_4 = -ds\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=x_2}d\tau.$$

为简化问题，我们先假定杆的侧面是绝热的. 这样，根据能量守恒定律，Δk 上的热量应该是平衡的，也就是说，等式

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 - Q_4 \tag{1.4}$$

应成立. 把 Q_i 的表示式代入式(1.4)后，得到

$$c\rho\int_{x_1}^{x_2}[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]d\xi =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau + d\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} - \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\right] d\tau. \tag{1.5}$$

这便是杆内部(指除去两端)热传导现象的一种数学描述．式(1.5)叫做积分形式的热传导方程．

假设 $u(x,t)$ 对 x 两次连续可微，对 t 连续可微一次．把式(1.5)改写为

$$c\rho\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{1.6}$$

或

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{1.7}$$

其中

$$a^2 = \frac{d}{c\rho},\ f(x,t) = \frac{F(x, t)}{c\rho}. \tag{1.8}$$

式(1.7)叫做微分形式的热传导方程，或简称热传导方程，a^2 叫导温系数．当 $f \equiv 0$ 时，即杆中无热源时，式(1.7)叫做齐次热传导方程．

如果杆的侧面不是绝热的，则杆与周围介质有热交换．热交换时，热量仍从温度较高处流向温度较低处．根据牛顿热交换定律，在单位时间内，单位长度的杆所失去的热量为

$$\bar{Q} = h(u - \bar{u}),$$

这里，u 为杆的温度，$\bar{u}$ 为杆周围介质的温度（它是已知函数），h 叫热交换系数．

当杆的侧面不绝热时，在推导(1.7)的过程中，应将 $F(x,t)$ 写为 $F(x,t) - h(u - \bar{u})$，方程(1.7)变为

$$u_t = a^2 u_{xx} - bu + f(x,t), \tag{1.9}$$

其中

$$b = \frac{h}{c\rho}, \quad f = b\bar{u} + \frac{F}{c\rho}. \tag{1.10}$$

§3 初始条件和边界条件

杆上的温度分布，除去遵循热传导规律外，显然，还同杆的初始热状态及杆两端的热状态有关.

初始热状态指的是 $t = 0$ 时杆上的温度分布

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{1.11}$$

这里，$\varphi(x)$ 定义在区间 $k = (0,K)$ 内，K 是杆的长度，杆左端位于坐标原点处.

杆两端的热状态，经常有以下几种情况.

1） 杆两端的温度按给定的规律变化:

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(K,t) = \mu_2(t); \end{cases} \tag{1.12}$$

其中 $\mu_i(t)$ 定义在时间区间 $l = [0,T]$ 内，在这段时间里，我们考察杆上的温度分布的变化情况，$i = 1,2$.

2） 杆两端的热流强度是已知的，即给定了单位时间内流过两端截面的热量:

$$Q(0,t) = -ds\frac{\partial u(0,t)}{\partial x},$$

$$Q(K,t) = -ds\frac{\partial u(K,t)}{\partial x};$$

这时，杆两端截面处的温度梯度是给定的:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -\dfrac{Q(0,t)}{ds} = \nu_1(t), \\ \dfrac{\partial u(K,t)}{\partial x} = -\dfrac{Q(K,t)}{ds} = \nu_2(t); \end{cases} \tag{1.13}$$

这里的 $\nu_i(t)$ 定义在 l 内，$i = 1,2$.

3） 如果杆两端不是绝热的，而与杆端介质有热交换，那

么，在单位时间内，从杆端流出的热量是

$$\bar{Q} = h(u - \bar{u})S, \tag{1.14}$$

其中 $\bar{u}$ 是杆端介质的温度. $\bar{Q}$ 应同杆端截面处的热流强度相等，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \dfrac{h_1}{d} u(0,t) = \dfrac{h_1}{d} \bar{u}_1(t), \\ \dfrac{\partial u(K,t)}{\partial x} + \dfrac{h_2}{d} u(K,t) = \dfrac{h_2}{d} \bar{u}_2(t); \end{cases} \tag{1.15}$$

此处，$\bar{u}_1(t)$ 和 $\bar{u}_2(t)$ 以及 h_1 和 h_2 分别是杆两端介质的温度和它们的热交换系数.

通常，式 (1.11) 叫初始条件或始值条件，式 (1.12)、(1.13) 和 (1.15) 叫边界条件或边值条件.

§4 杆的伸缩

前面，假定了杆的两端是固定不动的. 但是，很多实际问题中，杆两端（或一端）的位置是随时间而变化的. 最简单的情况是杆的长度随温度变化而伸缩. 考虑到这种情况，应当认为杆两端的位置(或杆长)是时间的函数，例如，杆左端位置随时间变化的规律用函数 $x = \psi_1(t)$ 描写，而另一端是 $x = \psi_2(t)$.

在讨论杆上温度分布时，经常认为杆的伸缩规律是已知的，即 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$ 是事先给定的. 这时，边界条件的形状也随时间而变化，即在式 (1.12)，(1.13) 和 (1.15) 中应将 0 和 K 分别变换为 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$.

§5 有限均匀体的热传导问题

数学物理中有限均匀体的热传导问题的提法是：当已知杆端位置变化情况，在给定杆的初始温度和杆两端的热状态

后，按热传导规律确定杆上的温度分布，即根据已知的初始条件和边界条件寻找热传导方程的解.

现在，依据边界条件的不同形状，列出热传导方程的各种定解问题.

设

$$S_i = \{(x,t), x = \psi_i(t), 0 \leqslant t \leqslant T\} \quad (i = 1,2)$$

是 (x,t) 平面上两条不相交的曲线，$\psi_2(t) > \psi_1(t)$，$0 \leqslant t \leqslant T$. 以两条平行的直线 $t = 0$ 和 $t = T$ 及上述两条曲线为界的开曲边梯形区域记为 g:

$$g = \{(x,t), \psi_1(t) < x < \psi_2(t), 0 < t < T\}.$$

第一边值问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (x, t) \in g; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k = \{x, \psi_1(0) \leqslant x \leqslant \psi_2(0)\}; \\ u|_{S_i} = \chi_i(t), \quad i = 1, 2, & t \in l = \{t, 0 \leqslant t \leqslant T\}; \end{cases}$$

第二边值问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (x, t) \in g; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{S_i} = \chi_i(t), \quad i = 1, 2, & t \in l; \end{cases}$$

第三边值问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (x, t) \in g; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k; \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha_i(t) u\right]_{S_i} = \chi_i(t), \quad i = 1, 2, & t \in l. \end{cases}$$

满足以下条件的函数 u 称为上述问题的(古典)解:

1) $u(x,t)$ 在开区域 g 内满足热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t);$$

2) $u(x,t)$ 在闭区域 $\bar{g}$ 内连续，并且，在 k 内，

$$u(x,0)=\varphi(x);$$

当问题为第二或第三边值问题时，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 在 g 内连续；

3) $u(x,t)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 或它们与 $\alpha_i(t)$ 所构成的线性组合在曲线 S_i 上取给定的边值 $\chi_i(t)$, $i=1,2$.

还有一个问题值得注意. 热传导问题如果提得合理，杆的初始热状态和其两端的热状态必然有一定的协调关系. 例如，对第一边值问题而言，由初始条件给出的杆端的初始温度，应该和由边界条件所确定的杆端在初始时刻的温度是一致的，也就是说等式

$$\chi_1(0)=\varphi(\psi_1(0)),$$

$$\chi_2(0)=\varphi(\psi_2(0))$$

应该成立. 这便是第一边值问题的协调条件. 类似地，第二和第三边值问题的协调条件分别是：

$$\chi_i(0)=\frac{d\varphi(\psi_i(0))}{dx}, \qquad i=1,2;$$

$$\chi_i(0)=\frac{d\varphi(\psi_i(0))}{dx}+\alpha_i(0)\varphi(\psi_i(0)), \ i=1,2.$$

§6 哥西问题

当杆足够长时，在较短的时间内，杆两端的热状态对杆中部的温度影响很弱. 这时，如果杆上没有热源，那么，杆内部的温度分布主要取决于杆的初始温度，因此，杆的长度的意义就不大了. 换言之，在这种情况下，我们将讨论无穷长杆上的热传导问题，或热传导始值问题. 它亦称哥西问题，其提法是：寻找在闭半平面 $t\geqslant 0$ 上定义的函数 $u(x,t)$，使其在开半平面 $t>0$ 上满足齐次热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0, -\infty < x < \infty,$$

并在 $t = 0$ 时取已给的初始值:

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

§7 两种不同介质中的热传导问题

现在，假定杆是由两种不同的均匀介质构成的. 设第 i 种介质的温度为 $u_i(x,t)$，导温系数为 a_i^2，比热为 c_i，密度为 ρ_i，其中热源的强度为 $F_i(x,t)$，$i = 1, 2$.

为了写出这两种介质中的热传导问题，引入下列符号.

设

$$S_j = \{(x,t),\ x = \psi_j(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\} \quad (j = 1,2,3)$$

是 (x,t) 平面上三条互不相交的曲线，S_1 和 S_3 是杆左右端点运动的轨迹，S_2 是两种介质分界点移动的轨迹. 区域

$$g_i = \{(x,t),\ \psi_i(t) < x < \psi_{i+1}(t),\ 0 < t < T\} \ (i = 1,2)$$

是由杆端所限、由介质分界点所分的相邻的两个开曲边梯形. 区间

$$k_i = \{x,\ x_i = \psi_i(0) \leqslant x \leqslant \psi_{i+1}(0) = x_{i+1}\} \ (i = 1,2)$$

是杆的两部分的初始位置，x_2 是介质分界点的初始位置.

在介质分界点上，我们考虑温度和热流平衡关系式的一般形式:

$$u_1|_{S_{2-}} - u_2|_{S_{2+}} = \xi(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\delta_1(t)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{S_{2-}} - \delta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{S_{2+}} = \zeta(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T;$$

此处，记号 S_{2-} 和 S_{2+} 分别表示从区域 g_1 和 g_2 方面所取的在 S_2 上的极限值. 上述二关系式称为交界条件.

这样，两种不同介质中的热传导问题构成了带有间断系数的热传导方程的边值问题，它的提法是: 寻找在闭区域 $\bar{g}_i$ 内连续的函数 $u_i(x,t)$，使之在 g_i 内满足方程

$$L_i u_i = a_i^2 \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = f_i(x, t)$$

$$= \frac{F_i(x, t)}{c_i \rho_i}, \ i = 1, 2;$$

以及以下诸条件:

1) 初始条件

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \qquad x \in k_i, \ i = 1, 2;$$

2) 交界条件

$$u_1|_{S_{2-}} - u_2|_{S_{2+}} = \xi(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\delta_1(t) \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{S_{2-}} - \delta_2(t) \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{S_{2+}} = \zeta(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T;$$

3) 边界条件

$$u_i|_{S_j} = \chi_i(t), \quad t \in l, \quad j = 2i - 1,$$

$i = 1, 2$.(第一边值问题)

或

$$[\partial u_i / \partial x + \alpha_i(t) u_i]_{S_j} = \chi_i(t), \quad t \in l, \quad j = 2i - 1,$$

$i = 1, 2$.(第二、三边值问题)

同有限均匀体热传导边值问题一样,要使上述问题有解,还必须在杆两端点及介质分界点处 $(x_j = \psi_j(0), 0)$ $(j = 1, 2, 3)$ 成立相应的协调条件,即在这些点上,问题的边界条件、初始条件和交界条件间要满足一定的协调关系(等)式.

第二节 基本解的性质

本书内,采用数学物理的方法讨论**宏观上的**各种热传导现象. 在我们所使用的方法中,热源的研究起着非常重要的作用. 我们将按分布区域和作用方式对热源进行数学分类,并讨论它们对杆的温度的影响. 这里,先对热源的概念做数

学的抽象，以阐明其准确的涵意.

§1 瞬时点热源

今后，除非特别指明，只讨论侧面绝热的无穷长杆，在时刻 τ 以前，杆上各处温度均为零. 假定从 τ 到 $\tau+\Delta\tau$ 这段时间内，在杆上 ξ 处有一热源作用，放出热量 Q，它使 ξ 处附近的温度有了变化，或使杆上温度分布变为

$$\bar{u}(x)=\begin{cases}0, & x>\xi+\Delta\xi,\ x<\xi-\Delta\xi,\\ u_\Delta(x)>0, & \xi-\Delta\xi<x<\xi+\Delta\xi,\end{cases}$$

其中 $u_\Delta(x)$ 为连续函数.

这时，根据式 (1.1) 有

$$c\rho\int_{\xi-\Delta\xi}^{\xi+\Delta\xi}u_\Delta(x)\,dx=Q. \tag{2.1}$$

如果当 $\Delta\tau\to0$ 时，$\Delta\xi\to0$，并且，当 $\Delta\tau$ 足够小时，式 (2.1) 恒成立，因之，

$$\lim_{\Delta\tau\to0}\left[c\rho\int_{\xi-\Delta\xi}^{\xi+\Delta\xi}u_\Delta(x)dx\right]=Q. \tag{2.2}$$

这时，我们称在时刻 τ 在杆上 ξ 处作用有一个强度为 Q 的瞬时点热源，τ 为热源作用的瞬时，ξ 为热源的作用点.

§2 基本解

定义 在强度为 $Q=c\rho$、作用点为 ξ、作用瞬时为 τ 的瞬时点热源作用下，描写时刻 τ 前温度为零的无穷长杆上温度变化的函数 $G(x,t;\xi,\tau)$ 叫做热传导方程

$$a^2\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{2.3}$$

的基本解.

为了寻求基本解，先假设限定热源形成方式的 (2.2) 式

是以一种最简单的特定办法实现的，即点热源是以线性方式形成的：当 $\Delta\tau$ 足够小时，

$$\bar{u}(x)=\begin{cases}0, & x>\xi+\Delta\xi,\ x<\xi-\Delta\xi,\\ \dfrac{1}{2\Delta\xi}, & \xi-\Delta\xi<x<\xi+\Delta\xi.\end{cases}\tag{2.4}$$

在瞬时点热源作用后，热量由热源作用点向无穷长杆两端传导．因此，为寻求 $G(x,t;\xi,\tau)$，先求解热传导始值问题：

$$\text{(I)}\begin{cases}a^2u_{xx}=u_t, & t>\tau+\Delta\tau,\ -\infty<x<\infty;\\ u|_{t=\tau+\Delta\tau}=\bar{u}(x), & -\infty<x<\infty;\end{cases}$$

然后再找出当 $\Delta\tau\to 0$ 时这个问题的解 $G_{\Delta\tau}$ 的极限．

由于热传导方程是线性的，可以把问题 (I) 的解写成差的形式：

$$G_{\Delta\tau}=G_1-G_2,$$

其中 G_1 是问题

$$\text{(II)}\begin{cases}a^2u_{xx}=u_t, & t>\tau+\Delta\tau,\ -\infty<x<\infty;\\ u|_{t=\tau+\Delta\tau}=u_{1\Delta}(x)=\begin{cases}0, & x<\xi-\Delta\xi,\\ \dfrac{1}{2\Delta\xi}, & x>\xi-\Delta\xi;\end{cases}\end{cases}$$

的解，G_2 是问题

$$\text{(III)}\begin{cases}a^2u_{xx}=u_t, & t>\tau+\Delta\tau,\ -\infty<x<\infty;\\ u|_{t=\tau+\Delta\tau}=u_{2\Delta}(x)=\begin{cases}0, & x<\xi+\Delta\xi,\\ \dfrac{1}{2\Delta\xi}, & x>\xi+\Delta\xi;\end{cases}\end{cases}$$

的解．

为了求解问题 (II) 及 (III)，在改变时间和空间零点位置后，只需求解问题：

$$
(\mathrm{IV})\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_t, & t > 0,\ -\infty < x < \infty; \quad (2.3) \\ u|_{t=0} = \bar{u}_\Delta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2\Delta\xi}, & x > 0. \end{cases} & (2.5) \end{cases}
$$

在宏观上研究热现象时，空间变量和时间变量并不是等价的．式(2.3)中的等号说明，温度对时间变量的一次微分相当于其对空间变量的两次微分．这种时空变量在量纲上的不一致性，给我们一种提示：在求解问题IV时，先统一量纲，然后，再解算问题．因此，我们设

$$
u(x, t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right),
$$

再设

$$
q\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 2\Delta\xi u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).
$$

引用新变量

$$
y = \frac{x}{\sqrt{t}}
$$

后，有

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2t\Delta\xi}\frac{d^2 q}{dy^2},
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{y}{4t\Delta\xi}\frac{dq}{dy};
$$

将其代入(2.3)式得

$$
2a^2\frac{d^2 q}{dy^2} = -y\frac{dq}{dy}, \tag{2.6}
$$

(2.5)式则变为

$$
q(-\infty) = 0, \qquad q(\infty) = 1. \tag{2.7}
$$

常微分方程(2.6)容易求积

$$2a^2\frac{q''}{q'} = -y,$$

$$q' = ce^{-\frac{y^2}{4a^2}},$$

为满足 (2.7) 式中第一个条件，写成

$$q = c\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{z^2}{4a^2}}dz = c_1\int_{-\infty}^{\frac{y}{2a}} e^{-v^2}dv,$$

由 (2.7) 式第二个条件推得

$$1 = q(\infty) = c_1\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}dv = c_1\sqrt{\pi},$$

即

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

因此，

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\Delta\xi}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-v^2}dv \\ &= \frac{1}{2\,\Delta\xi}\cdot\frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] \end{aligned}$$

为问题 (IV) 的解，此处

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-v^2}dv$$

是误差积分.

所以，问题 (I) 的解为

$$\begin{aligned} G_{\Delta\tau}(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2\,\Delta\xi}\cdot\frac{1}{2}\Bigg[&\Phi\left(\frac{x-\xi+\Delta\xi}{2a\sqrt{t-\tau-\Delta\tau}}\right) \\ &-\Phi\left(\frac{x-\xi-\Delta\xi}{2a\sqrt{t-\tau-\Delta\tau}}\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

由瞬时点热源的概念知道，当 $\Delta\tau\to 0$ 时，$\Delta\xi\to 0$，因之，所求的基本解为

$$G(x, t; \xi, \tau) = \lim_{\Delta\tau\to 0} G_{\Delta\tau}(x, t; \xi, \tau)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}. \qquad (2.8)$$

(2.8) 式是点热源以特定的 (2.4) 式方式形成时所求得的基本解. 还需进一步证明，以任何一种满足要求 (2.2) 式的方式所形成的点热源，对无穷长杆温度分布的影响都是用同一个函数 (2.8) 式来描述的. 为叙述方便起见，这个证明放在第四章第二节中. 这里，我们先讨论 $G(x, t; \xi, \tau)$ 的一些性质.

§3 基本解的性质

1) 在任何 x, ξ $(-\infty < x, \xi < \infty)$ 和 $t > \tau$ 值

$$G(x, t; \xi, \tau) \geqslant 0.$$

这说明一个极其明显的事实：既然热源放出热量，那么，无论它作用于何处，在它作用后，必然提高杆上各处的温度.

2) 空间变量 x 和 ξ 在基本解里是对称地出现的，这符合于互易原理：在 ξ 处的热源对 x 处的影响与在 x 处的热源对 ξ 处的影响是相同的，即瞬时点热源的作用关于空间变量是可易的；但是，时间变量 t 和 τ 在基本解里不是对称的，这说明**热传导过程是不可逆过程**，即任何传热过程均不可能有逆过程，或者说，不可能使杆连续经历与原传热过程中在时间顺序上恰好相反的各个热状态. 也就是说，热量只能自发地由整化零，而不能自发地由零聚整.

3) 根据式 (1.1)，在任何时刻 $t > \tau$，整个杆上储存的热量为

$$c\rho\int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, \tau)dx = Q$$

我们只是在宏观方面讨论了理想的热传导：热源在瞬时τ所提供的全部热量，在整个传热过程中，没有任何损耗.

4) 现在讨论杆的温度分布图象.

为此，讨论在固定时刻杆上各处的温度分布及杆上固定点的温度随时间变化的情况.

为直观起见，设$\xi=\tau=0$，$a^2=1$，式(2.3)的基本解变为

$$G(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

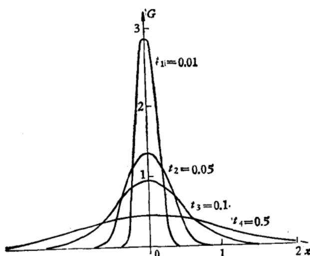


图 一

图一给出了不同时刻的杆上温度G随x变化的情形. 从图上立刻看出，当t足够小时，曲线所界的面积几乎都在原点附近，也就是说，热源作用后的短瞬间，热量基本上都集中在热源作用点附近，而在热源作用瞬时，所有热量都集中在作用点上.

从图一及 $G(x, t)$ 的分析式均可见，当 $t=T$ 时，$G(x, T)$ 在 $x=0$ 处取最大值，即在固定时刻，热源作用点的温度是全杆上最高的温度。

热源作用点处 $(x=\xi=0)$ 的温度 G_0 随时间变化的规律是

$$G_0(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}.$$

因此，在热源作用后的瞬间，热源作用点处温度足够高，在热源作用瞬时，$(t=\tau=0)$ 这点的温度无限高。

在热源作用点外 $x=r\neq 0$ 各处，温度随时间变化的规律是

$$\bar{G}(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{r^2}{4t}}.$$

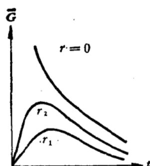


图 二

图二画出了不同点处温度随时间变化的情形。当 t 足够大时，$\bar{G}\to G_0$，即热源作用相当长的时间后，杆上各处温度趋于一致；当 t 足够小时，$G_0\gg\bar{G}$，即热源作用后的短瞬间，热源作用点的温度远高于杆上其它点的温度。不难看出，当 $t\to\tau=0$ 时，热源作用点外各处温度均趋于零。

做为 (x, t) 的函数，通常，还把基本解 G 叫做瞬时点热源的温度影响函数。

5) $G(x, t; \xi, \tau)$ 关于 (x, t) 满足方程 (2.3)，关于 (ξ, τ) 满足方程

$$a^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} = -\frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau}. \tag{2.9}$$

6） 在 τ 时刻，作用于 ξ 处的强度为 Q 的瞬时点热源的温度影响函数为

$$\frac{Q}{c\rho} G(x, t; \xi, \tau),$$

这里的 Q 亦可取负值.

第三节 各种热势的意义

§1 单层热势

假定在杆上 ξ 处有一热源，在时间段 $0 \leqslant \tau \leqslant T$ 内连续作用. 如果在单位时间内热源放出热量 $f(\tau)$，$0 \leqslant \tau \leqslant T$，则称在 ξ 处有一固定的强度为 $f(\tau)$ 的连续作用的点热源. 显然，从初始时刻 $t=0$ 到时刻 t，热源共放出热量

$$Q = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

现设杆上有一点热源，其作用点沿曲线 S: $\{\xi = \phi(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant T\}$ 移动，其强度 $Q(\tau)$ 为连续函数. 从时刻 τ 到 $\tau + \Delta\tau$，此热源可视为一强度为 $Q(\tau)\Delta\tau$、作用点为 $\xi = \phi(\tau)$、作用瞬时为 τ 的瞬时点热源，其温度影响函数为

$$\frac{Q(\tau)}{c\rho} G(x, t; \phi(\tau), \tau)\Delta\tau.$$

此点热源从时刻 $t=0$ 连续作用到时刻 t 对杆的温度影响为

$$\frac{1}{c\rho}\int_0^t Q(\tau) G(x, t; \phi(\tau), \tau) d\tau$$

$$= \int_0^t \mu(\tau)\, G(x, t; \phi(\tau), \tau) d\tau =$$

$$= V[\mu] = V(x, t),$$

它叫单层热势.

$$\mu(\tau) = \frac{Q(\tau)}{c\rho}$$

叫热势的密度，S 叫热势的分布曲线.

§2 双层热势

设在瞬时 τ，有一强度为Q的瞬时点热源作用于杆上 $\xi+\Delta\xi$ 处，另一强度为 $-Q$ 的瞬时点热源作用于杆上 $\xi-\Delta\xi$ 处. 这种热源叫做**瞬时热偶极子**，ξ 叫做偶极子的作用点，$N = 2Q\Delta\xi$ 叫热偶极子矩.

当 $\Delta\xi$ 足够小时，瞬时热偶极子的温度影响函数为

$$\frac{N}{c\rho} \cdot \frac{\partial G(x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi}.$$

现设热偶极子的作用点沿曲线 S 移动，偶极子矩$N(\tau)$随时间连续变化. 热偶极子从开始时刻 $t=0$ 到时刻 t 连续作用的温度影响函数是

$$\int_0^t \frac{N(\tau)}{c\rho} \frac{\partial G(x, t; \phi(\tau), \tau)}{\partial \xi} d\tau$$

$$= \int_0^t \nu(\tau) \frac{\partial G(x, t; \phi(\tau), \tau)}{\partial \xi} d\tau$$

$$= W[\nu] = W(x, t),$$

它叫双层热势.

$$\nu(\tau) = \frac{N(\tau)}{c\rho}$$

叫热势的密度，S 叫热势的分布曲线.

单层和双层热势统称为**曲线热势**.

§3 面热势

设在无穷长杆上有一连续分布连续作用的热源，其强度 $f(x,t)$ 是连续函数．从时刻 τ 到 $\tau+\Delta\tau$，在 ξ 到 $\xi+\Delta\xi$ 一段杆上产生的热量为

$$\Delta Q = f(\xi,\tau)\,\Delta\xi\,\Delta\tau.$$

将此视为时刻 τ 作用于 ξ 处的瞬时点热源，则其对杆的温度分布影响为

$$\frac{\Delta Q}{c\rho}G(x,t;\xi,\tau)=\frac{f(\xi,\tau)}{c\rho}G(x,t;\xi,\tau)\,\Delta\xi\,\Delta\tau.$$

设热源在时刻 τ 的作用区域为区间 $k_\tau=\{\xi,\ \psi_1(\tau)\leqslant\xi\leqslant\psi_2(\tau)\}$，$0\leqslant\tau\leqslant T$．这时，热源从时刻 $t=0$ 作用到时刻 t 的温度影响函数可写为

$$\int_0^t d\tau\int_{\psi_1(\tau)}^{\psi_2(\tau)}\frac{f(\xi,\tau)}{c\rho}G(x,t;\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$$=\iint\limits_g\rho(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau=U[\rho]=U(x,t),$$

此处 g 为 $(\xi,\ \tau)$ 平面上一有限区域，$g=\{(\xi,\tau),\ \psi_1(\tau)\leqslant\xi\leqslant\psi_2(\tau),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$．

$U[\rho]$ 叫做面热势，

$$\rho(\xi,\tau)=\frac{f(\xi,\tau)}{c\rho}$$

叫做热势的密度，有时称 U 分布在区域 g 上，或称 g 为面热势 U 的分布区域．

第二章　热势的基本性质

第一节　微 分 公 式

区域 g 被直线 $t=t_0$ 所截的下半部分记为 $g_0^{t_0}$ $(0<t_0\leqslant T)$. 区域 $g_0^{t_0}$ 的两个侧边分别用 $[S_1]_0^{t_0}$ 和 $[S_2]_0^{t_0}$ 表示. 为方便起见,有时只写 $S_0^{t_0}$, 它可以是 $[S_1]_0^{t_0}$, 也可以是 $[S_2]_0^{t_0}$. 不失一般性,可设 $a^2=1$, 这时,热传导方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}; \tag{1.1}$$

各种热势为:

$$V[\mu]=\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{-\frac{[x-\psi_i(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\}d\tau, \tag{1.2}$$

$$W[\mu]=\int_0^t \frac{\mu(\tau)(x-\psi_i(\tau))}{4\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}\exp\left\{-\frac{[x-\psi_i(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\}d\tau, \tag{1.3}$$

$$U[\rho]=\int_0^t d\tau\int_{\psi_1(\tau)}^{\psi_2(\tau)}\frac{\rho(\xi,\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right\}d\xi. \tag{1.4}$$

1　单层热势的导数

当 $0<t\leqslant T$ 时,在曲线 S 外,

$$\frac{\partial V[\mu]}{\partial x}=-W[\mu]. \tag{1.5}$$

现设 $\mu(t)$ 和 $\psi(t)$ (可取 ψ_1 或 ψ_2 为 ψ) 在 l 内有连续

的导数：当 $0 < t \leqslant T$ 时，在曲线 S 外，

$$\frac{\partial V[\mu]}{\partial t} = V[\mu'] + W[\mu\psi'] + \frac{\mu(0)}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{[x-\psi(0)]^2}{4t}\right\}. \qquad (1.6)$$

当 $t > 0$ 时，在曲线 S 外，单层热势 $V[\mu]$ 满足 (1.1).

§2 双层热势的导数

由 (1.5) 推得

$$\frac{\partial W[\mu]}{\partial x} = -\frac{\partial V[\mu]}{\partial t}. \qquad (1.7)$$

假定 $\mu(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 l 内有一次和两次连续的导数. 当 $t > 0$ 和 $(x, t)\bar{\in} S$ 时，

$$\frac{\partial W[\mu]}{\partial t} = W[\mu' + \mu(\psi')^2] - V[\mu'\psi' + \mu\psi''] + \frac{\mu(0)}{4\sqrt{\pi t}}\left[2\psi'(0) + \frac{x-\psi(0)}{t}\right] \times \exp\left\{-\frac{[x-\psi(0)]^2}{4t}\right\}. \qquad (1.8)$$

当 $t > 0$ 时，在曲线 S 外，双层热势满足 (1.1).

§3 面热势的导数

设 $\rho(x, t)$ 在 g 内对 x 连续可微，则

$$\frac{\partial U[\rho]}{\partial x} = U\left[\frac{\partial \rho}{\partial x}\right] + V_1[\rho(\psi_1(t), t)] - V_2[\rho(\psi_2(t), t)], \qquad (1.9)$$

上式右端的热势 V_i 分布在 S_i 上，$i = 1, 2$.

假定 $\psi_i'(t)$ 和 $\partial\rho/\partial t$ 连续，$i=1, 2$，则

$$\frac{\partial U[\rho]}{\partial t}=U\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]+V_2[\psi_2'(t)\rho(\psi_2(t), t)]-$$
$$-V_1[\psi_1'(t)\rho(\psi_1(t), t)]$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\psi_1(0)}^{\psi_2(0)}\rho(\xi, 0)\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right\}d\xi. \tag{1.11}$$

公式 (1.5)—(1.11) 统称热势论的微分公式. 它们说明了各种热势及其导数间的关系. 由这些公式可以看出，当 $t=0$ 时，若密度取零值，则各种热势的导数仍是热势，即具有已知密度的热势的导数可以用具有其它密度的热势表示.

第二节 基本公式

§1 非齐次热传导方程

从热传导方程的推导过程和面热势的意义可以看出，面热势 (1.4) 在 g 内满足非齐次热传导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}-\rho(x, t). \tag{2.1}$$

现在，我们严格证明这个结论.

1) 先讨论 $\rho\equiv 1$ 的特殊情形.

由 (1.9) 看出

$$\frac{\partial U[1]}{\partial x}=V_1[1]-V_2[1],$$

再应用 (1.5) 得到

$$\frac{\partial^2 U[1]}{\partial x^2}=\frac{\partial V_1[1]}{\partial x}-\frac{\partial V_2[1]}{\partial x}=W_2[1]-W_1[1],$$

这里，W 和 V 的下标 $i(i=1, 2)$ 表示热势分布在曲线 S_i 上.

利用变数替换

$$\zeta = \frac{x - \xi}{2\sqrt{t - \tau}}$$

可以验证,当 $(x, t) \in g$ 时,

$$\frac{\partial U[1]}{\partial t} = 1 + W_2[1] - W_1[1].$$

由上面的计算结果得到

$$\frac{\partial^2 U[1]}{\partial x^2} = \frac{\partial U[1]}{\partial t} - 1,$$

即单位密度的面热势满足非齐次热传导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - 1.$$

2) 现讨论一般情形.

令 (x_0, t_0) 是区域 g 中任意一点. 我们证明, 面热势 $U[\rho]$ 在此点满足非齐次热传导方程(2.1).

把 $U[\rho]$ 写成

$$U[\rho] = \rho(x_0, t_0)U[1] + U[\rho(\xi, \tau) - \rho(x_0, t_0)],$$

其中

$$U[\rho(\xi, \tau) - \rho(x_0, t_0)] = \iint_{g_0^t} [\rho(\xi, \tau) - \rho(x_0, t_0)] G(x, t; \xi, \tau) d\xi d\tau = U^*(x, t). \tag{2.2}$$

根据前一段的结果, 为了证明 $U[\rho]$ 在 (x_0, t_0) 满足(2.1), 只需证明函数 U^* 在这点满足齐次热传导方程; 然而, 基本解满足齐次热传导方程,因此,只要证明: 在 (x_0, t_0) 点, 导数

$$\left.\frac{\partial^2 U^*(x, t)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}}$$

和

$$\left.\frac{\partial U^*(x, t)}{\partial t}\right|_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}}$$

可在(2.2)中用积分号下微分法直接计算,即

$$\left.\frac{\partial^2 U^*(x, t)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}} = \iint_{g_0^{t_0}} [\rho(\xi, \tau) - \rho(x_0, t_0)] \times \left.\frac{\partial^2 G(x, t; \xi, \tau)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}} d\xi d\tau, \quad (2.3)$$

$$\left.\frac{\partial U^*(x, t)}{\partial t}\right|_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}} = \iint_{g_0^{t_0}} [\rho(\xi, \tau) - \rho(x_0, t_0)] \times \left.\frac{\partial G(x, t; \xi, \tau)}{\partial t}\right|_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}} d\xi d\tau. \quad (2.4)$$

这两个等式可以类似地证明,我们这里只证明头一个.

3) 为了证明(2.3),假定 $\rho(x, t)$ 在 g 内对 x 和 t 连续可微.这时,

$$\rho(\xi, \tau) - \rho(x_0, t_0) = O(|x_0 - \xi| + |t_0 - \tau|). \quad (2.5)$$

为验证(2.3)的正确性,只需证明它右端的积分在 (x_0, t_0) 点附近是一致收敛的.容易看出

$$\left.\frac{\partial^2 G(x, t; \xi, \tau)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi(t_0 - \tau)^3}} \times \left\{\frac{(x_0 - \xi)^2}{2(t_0 - \tau)} - 1\right\} e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4(t_0-\tau)}}.$$

由于对所有的 $x \geqslant 0$ 和 $0 < \delta < 1$ 下列不等式成立[1]:

$$e^{-x} = O\left(x^{-\frac{3+\delta}{2}}\right),$$

$$e^{-x} = O\left(x^{-\frac{1+\delta}{2}}\right),$$

---

1) 不等式 $e^{-x} = O(x^{-\alpha})$ 以后经常用到,$\alpha \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. 在各个具体情况,将根据需要适当地选择 α.

所以，

$$|x_0-\xi|\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\bigg|_{(x_0,t_0)}=O[|x_0-\xi|^{-\delta}|t_0-\tau|^{\frac{\delta}{2}-1}];$$

由于

$$e^{-x}=O\left(x^{-\frac{3-\delta}{2}}\right),$$

$$e^{-x}=O\left(x^{-\frac{1-\delta}{2}}\right),$$

所以，

$$|t_0-\tau|\frac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{(x_0,t_0)}=O[|t_0-\tau|^{-\frac{\delta}{2}}|x_0-\xi|^{\delta-1}].$$

根据上述估值，(2.3) 右端的被积函数不超过

$$O(|x_0-\xi|^{\delta-1}|t_0-\tau|^{-\frac{\delta}{2}}+|x_0-\xi|^{-\delta}|t_0-\tau|^{\frac{\delta}{2}-1}),$$

它保证了 (2.3) 右端积分的一致收敛性.

为了简化证明，我们假定 $\rho(x,t)$ 对 x 和 t 连续可微. 从上面的叙述过程可见，只要对区域 $\bar{g}$ 内任意二点 (x_1,t_1) 和 (x_2,t_2) 下列估计成立:

$$\rho(x_1,t_1)-\rho(x_2,t_2)=O(|x_1-x_2|^\alpha+|t_1-t_2|^\beta),$$

那么，(2.3) 和 (2.4) 就是正确的，$\alpha>0$, $\beta>0$，这里的 O 与 (x_1,t_1), (x_2,t_2) 在 g 内的位置无关. 这种情况下，在估值时，要选取 δ 使 $0<\delta<\min(\alpha,\beta)$.

还可以进一步证明，如果 ρ 在 g 内连续，同时，

$$\rho(x_1,t)-\rho(x_2,t)=O(|x_1-x_2|^\alpha)$$

或

$$\rho(x,t_1)-\rho(x,t_2)=O(|t_1-t_2|^\beta)$$

在 $\bar{g}$ 内成立，则 (1.4) 在 g 内满足 (2.1)[1].

§2 基本公式

设 g 为面热势分布的区域，S 为曲线热势的分布曲线，L

1) 见文献[3].

为热传导算子，即

$$Lu \equiv u_t - u_{xx}.$$

把本章前两节的结果综合起来，列出下面的公式：

$$LV[\mu] = 0, \qquad t > 0, (x, t) \bar{\in} S; \tag{2.6}$$

$$LW[\mu] = 0, \qquad t > 0, (x, t) \bar{\in} S; \tag{2.7}$$

$$LU[\rho] = \begin{cases} \rho(x, t) & t > 0, (x, t) \in g, \\ 0 & t > 0, (x, t) \bar{\in} \bar{g}; \end{cases} \tag{2.8}$$

这些公式说明了各种热势和热传导算子(热传导方程)之间的关系，它们统称为热势论的基本公式.

第三节 跃度公式

§1 曲线热势的直接值

定义 当 (x, t) 只在曲线 S 上变动时，积分(1.2)和(1.3)叫做单层热势的直接值和双层热势的直接值，前者记为 V_{st}，后者记为 W_{st}. 当 (x, t) 不在曲线 S 上时，可以在积分号下对 x 微分 (1.2)：

$$\frac{\partial V[\mu]}{\partial x} = \int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial G(x, t; \phi(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau; \tag{3.1}$$

当 (x, t) 在曲线 S 上变动时，积分 (3.1) 所确定的函数叫单层热势对 x 的导数的直接值，记为 V_{xst}. 由公式 (1.5) 可见，当 S 连续可微时，V_{xst} 就有意义.

曲线 S 描写了热源(点热源或热偶极子)运动的轨迹. 因此，研究热势在这条曲线上的情况(即研究热势的直接值)具有特殊的意义. 应该注意，直接值只是时间变量 t 的函数，它给出的是时刻 t 时热源作用点处的温度. 直接值的概念是一个非常重要的概念，直接值的研究在热势论中占有中心位置.

引入直接值的概念后，自然要提出一个问题：当变点 (x, t) 趋近曲线 S 上某一点 (x_0, t_0) 时，热势是否趋近其直接值在 t_0 点的值？例如，对单层热势而言，我们提出的问题是

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} V(x, t) \underset{?}{=} V_{st}(t_0).$$

这个问题的回答是肯定的，因为积分 (1.2) 一致收敛.

§2 跃度公式

当变点 (x, t) 趋向曲线 S 上某点 (x_0, t_0) 时，双层热势 $W(x, t)$ 并不趋向它在 t_0 点的直接值 $W_{st}(t_0)$. 现在，我们计算极限

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)\in S} W(x, t) = W_{\lim}(x_0, t_0).$$

1) 先讨论密度为常数的情形：$\mu \equiv \mu_0 =$ 常数.

设曲线 S 连续可微. 利用变换

$$\frac{x-\phi(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}} = \zeta$$

把双层热势

$$W^{\mu_0}(x, t) = W[\mu_0]$$

写成

$$W[\mu_0] = \frac{\mu_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-\phi(0)}{2\sqrt{t}}}^{\beta} e^{-\zeta^2} d\zeta$$

$$+ \frac{\mu_0}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\phi'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{[x-\phi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau; \quad (3.2)$$

当 (x, t) 从 S 的右面 $(x > \phi(t))$ 趋向 S 时，

$$\beta = \lim_{\tau\to t-0} \frac{x-\phi(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}} = +\infty,$$

当 (x, t) 从左面趋向 S 时，$\beta = -\infty$，当 (x_0, t_0) 在曲线 S 上时，

$$\beta = 0;$$

(3.2) 右端最后一个积分是密度为

$$\nu(t) = \mu_0 \psi'(t)$$

的单层热势，将其记为 $V^\nu(x, t)$. 这样，当 (x, t) 不在曲线 S 上时，

$$W^{\mu_0}(x, t) = V^\nu(x, t) + \frac{\mu_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-\psi(0)}{2\sqrt{t}}}^{\beta} e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad (3.3)$$

当 (x_0, t_0) 在曲线 S 上时，

$$W_{st}^{\mu_0}(x_0, t_0) = V_{st}^\nu(x_0, t_0) + \frac{\mu_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_0-\psi(0)}{2\sqrt{t_0}}}^{0} e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad (3.4)$$

(3.3) 和 (3.4) 相减得到

$$W^{\mu_0}(x, t) - W_{st}^{\mu_0}(x_0, t_0) = V^\nu(x, t) - V_{st}^\nu(x_0, t_0)$$

$$\pm \frac{\mu_0}{2} - \frac{\mu_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_0-\psi(0)}{2\sqrt{t_0}}}^{\frac{x-\psi(0)}{2\sqrt{t}}} e^{-\zeta^2} d\zeta. \quad (3.4')$$

由于 $V^\nu(x, t)$ 的连续性，

$$V^\nu(x, t) \to V^\nu(x_0, t_0).$$

因此，

$$^{\pm}W_{\lim}^{\mu_0}(x_0, t_0) = \lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)\in S\pm} W^{\mu_0}(x, t)$$

$$= W_{st}^{\mu_0}(x_0, t_0) \pm \frac{\mu_0}{2}, \quad t_0 > 0; \quad (3.5)$$

其中(+)号对应于 (x, t) 从曲线 S 右侧趋向 (x_0, t_0) 时的情况，(−)号对应于从左面趋向 (x_0, t_0) 时的情况.

2) 现讨论一般情形.

设密度 $\mu(t)$ 连续可微. 把双层热势写成和的形式:

$$W[\mu] = W(x, t) = \mu(t) W[1] + W[\mu(\tau) - \mu(t)],$$

其中

$$W[1]=W^{1}(x,t)$$

是单位密度的双层热势，

$$W[\mu(\tau)-\mu(t)]=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t}[\mu(\tau)-\mu(t)]\times$$

$$\times\frac{x-\phi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{[x-\phi(\tau)]^{2}}{4(t-\tau)}}d\tau=\overline{W}(x,t)$$

在 $t\geqslant 0$ 时连续.

当 $(x,t)\to(x_0,t_0)\in S$ 时，根据 (3.5)

$$\mu(t)W^{1}(x,t)\to\mu(t_0)\left[W_{st}^{1}(x_0,t_0)\pm\frac{1}{2}\right],$$

另一方面，

$$\overline{W}(x,t)\to\overline{W}_{st}(x_0,t_0)=W_{st}(x_0,t_0)-\mu(t_0)W_{st}^{1}(x_0,t_0).$$

所以，当 $(x,t)\to(x_0,t_0)\in S$ 时，

$$W_{\lim}^{\pm}(x_0,t_0)=\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)\in S\pm}W(x,t)$$

$$=W_{st}(t_0)\pm\frac{\mu(t_0)}{2},\ t_0>0; \qquad (3.6)$$

其中的(+)号和(−)号分别对应于 (x,t) 从 S 的右面和左面趋向于 (x_0,t_0) 的情形.

(3.6) 叫(双层热势的)跃度公式.

前段中，我们还引入了单层热势对 x 的导数的直接值的概念，由于公式 (1.5) 和 (3.6)，可写出另一个(单层热势对 x 的导数的)跃度公式:

$$V_{x\lim}^{\pm}(x_0,t_0)=V_{xst}(x_0,t_0)\mp\frac{\mu(t_0)}{2}$$

$$=V_{xst}(t_0)\mp\frac{\mu(t_0)}{2},\ t_0>0. \qquad (3.7)$$

在证明公式 (3.6) 时，使用了 $\mu(t)$ 和 $\phi(t)$ 的连续可微

性，这只是为了简化计算．可以证明，在下述条件成立时，公式(3.6)和(3.7)就是正确的[1]：

(I) $\mu(t)$ 在 $[0, T]$ 内连续；

(II) $\phi(t)$ 在 $[0, T]$ 内满足指数大于 1/2 的正则条件，即若 t_1, t_2 是区间 $[0, T]$ 中任二点，则

$$|\phi(t_1)-\phi(t_2)| \leqslant c|t_1-t_2|^{\lambda},$$

其中 $1/2<\lambda\leqslant 1$ 叫正则指数，c = 常数和 t_1 及 t_2 的位置无关．

3) 跃度公式的解释和推论．

首先讨论公式(3.6)．从这个公式看出，当变点 (x, t) 趋向于曲线 S 上一点 (x_0, t_0) 时，积分(1.3)在 (x_0, t_0) 的极限值并不等于它在这点的直接值，而是等于这个直接值加上或减去密度的一半．这说明当变点 (x, t) 穿过曲线 S 时，积分(1.3)不是连续的，而是间断的．

前面已经指出，当 (x, t) 不在曲线 S 上时，双层热势是由积分(1.3)定义的；当 (x, t) 在曲线 S 上时，积分(1.3)只叫做双层热势的直接值．现在，如果把 S 上的双层热势补充定义为这个积分在 S 上的极限值，那么，这样定义的双层热势便在 S 的一个侧面(包括 S 在内)是连续的函数了．跃度公式(3.6)说明了补充定义的双层热势在 S 上的值与其直接值的关系：双层热势的直接值等于补充定义了的双层热势从 S 左右两侧所取的极限值之和的一半．今后，我们仍简称补充定义了的双层热势为双层热势．

关于双层热势直接值的讨论加深了我们对热源形式的了解．从这个讨论中我们看出：虽然热偶极子瞬时作用的温度影响函数是连续的，但是它的连续作用的温度影响函数一般

1) 参见文献 [3]．

却是间断的．同时，点热源连续作用与热偶极子连续作用的结果是不同的，前者的温度影响函数连续，后者一般是间断的．

热偶极子瞬时作用后，热源作用点的温度恒为零．（见第一章第三节）如果热偶极子连续作用，并且，作用点固定不动，那么，S 便成为一条直线，因而恒有

$$W_{st} = 0, \qquad t \geqslant 0,$$

即热源作用点处温度仍恒为零．这时，公式（3.6）中的正负号表示，热源作用点左侧和右侧温度的极限值数值相同，符号相反．

从（3.6）不难看出，如果在某时刻 t，热偶极子的作用消失了，即

$$\mu(t) = 0,$$

那么，此时热源作用点处的温度是连续的，即其左右侧温度的极限值均等于热势的直接值；反之，如果

$$\mu(t) \neq 0,$$

那么，此时热源作用点处的温度一定是间断的．

现在讨论公式(3.7)．由（3.7)看出：单层热势对 x 的导数的直接值等于它从曲线 S 左右两侧所取极限值之和的一半．

单层热势是点热源连续作用的温度影响函数，它对 x 的导数表示热流的大小和方向(见第一章第一节)．当

$$\mu(t) \neq 0$$

时，热源向杆两端供应热量，热量由热源作用点向杆两端流动，所以，此点两侧热流方向相反．这样，热流在热源作用点两侧所取的极限值是不同的，即热流在热源作用点处间断．公式（3.7）描写的正是这种间断情形．当 $\mu(t)$ 在 $[0, T]$ 内不取零值时，在每个瞬时，热流在热源作用点两侧方向相反，所以，根据傅立叶定律，$\partial V[\mu]/\partial x$ 在此处的极限值应持相反符

号. 这时,由 (3.7) 看出

$$|V_{x,t}(t)| \leqslant \frac{|\mu(t)|}{2}, t > 0. \tag{3.8}$$

特别地,单位密度的单层热势对 x 导数的直接值(或单位密度的双层热势的直接值)的模不超过 1/2.

公式 (3.6) 和 (3.7) 可以给曲线热势密度一个新的解释:双层热势的密度表示热偶极子作用点处两侧温度极限的差;如果杆的导热系数为 1, 那么,单层热势的密度表示点热源作用处两侧热流的极限的差.

结合使用跃度公式和热势论的微分公式, 可以研究曲线热势各阶导数越过曲线 S 时的变化情况. 例如, 当 S 为直线时,由微分公式 (1.7) 和 (1.6) 可以看出, 双层热势对 x 的导数以及单层热势对 t 的导数均能连续越过S.

§3 热势的始值

在结束本章时, 我们指出, 各种热势在 $t = 0$ 时均取零值,这从各种热势的意义中可以看出: 在 $t = 0$ 时,热源还没有作用,对无穷长杆的温度没有影响.

这个论断也不难严格证明: 对于单层热势和面热势而言,由于热势中被积函数的奇异性为

$$(t-\tau)^{-\frac{1}{2}},$$

所以,当 $t \to 0$ 时,积分一致地趋向于零;可以证明, 当 S (即 $\phi(t)$) 满足指数大于 1/2 的正则条件和 $\mu(0) = 0$ 时,双层热势也取零始值[1].

1) 参见文献 [3].

第三章　各种热传导问题的解法

第一节　热传导边值问题

求解热传导边值问题，即寻找杆上的温度分布规律，有多种方法．这里只介绍一种最自然的方法．我们设想所求温度分布是由于某种热源作用的结果，即把所求的温度分布视为某种热源的温度影响函数，因而，要根据边值问题的具体提法适当选择热势，把求解温度分布的问题变为求解热源强度的问题，即求解热势密度的问题．本节中，选择了一些热传导的典型问题，以说明热势的一些应用．

§1　一端固定的半无穷长杆热传导问题

如果我们感兴趣的只是杆左端附近一段杆的温度变化，则当杆足够长时，这段杆上的温度实际上只受杆左端温度和杆的初始温度的影响．这时，就可以认为杆是半无穷长的．一端固定的半无穷长杆的第一边值问题的提法是：

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0<x<\infty,\ 0<t<T; \quad (1.1)\\
u(x,0)=0, & 0\leqslant x<\infty; \quad (1.2)\\
u(0,t)=\chi(t), & 0\leqslant t\leqslant T; \quad (1.3)\\
\chi(0)=0; & \quad (1.4)
\end{cases}
$$

(1.4)是问题 (I) 的协调条件．为简单起见，假定在开始时间杆上温度为零．

问题 (I) 的解可以写成双层热势的形式

$$u(x,t)=\int_0^t \mu(\tau)\frac{x}{4\sqrt{\pi}\sqrt{(t-\tau)^3}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}d\tau, \quad (1.5)$$

它的密度 $\mu(t)$ 分布在直线段 $\{x=0,0\leqslant t\leqslant T\}$ 上.

根据第二章第二节基本公式 (2.7), (1.5) 满足方程(1.1) 及初始条件 (1.2).

为了使 (1.5) 所确定的函数 $u(x,t)$ 为问题 (I) 的解，只要适当地选择其密度 $\mu(t)$，使之满足条件 (1.3).

根据第二章第三节中跃度公式 (3.6)，当变点 (x,t) 趋向直线 $x=0$ 上的 $(0,t_0)$ 时，双层热势 (1.5) 的极限值等于它在这点的直接值加上密度的一半. 可是，(1.5) 在直线 $x=0$ 上的直接值为零，所以，当 (x,t) 趋近直线 $x=0$ 时，(1.5) 的极限值等于 $1/2\mu(t)$. 这样，为使 (1.5) 满足 (1.3)，其充要条件是选择 $2\chi(t)$ 做为热势 (1.5) 的密度.

于是，我们证明了：当 $\mu(t)=2\chi(t)$ 时，(1.5) 是问题 (I) 的解.

§2　一端可动的半无穷长杆的热传导问题

做为单层热势应用的例子，讨论一端可动的半无穷长杆的第二边值问题：

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}, & \psi(t)<x<\infty,\ 0<t<T; \quad (1.6)\\ u(x,0)=0, & \psi(0)\leqslant x<\infty; \quad (1.7)\\ \dfrac{\partial u(\psi(t),t)}{\partial x}=\chi(t), & 0\leqslant t\leqslant T; \quad (1.8)\\ \chi(0)=0. & (1.9)\end{cases}$$

在问题 (II) 中，杆左端运动的轨迹是由方程

$$x=\psi(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

所确定的曲线S.

问题 (II) 的解可以借助于单层热势

$$u(x, t)=\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{[x-\phi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau \qquad (1.10)$$

来寻找. 根据第二章第二节基本公式 (2.6), (1.10) 满足 (1.6) 和 (1.7); 为使其满足 (1.8), 依第二章第三节中跃度公式 (3.7),应选择密度 μ 满足

$$V_{xst}(t)-\frac{1}{2}\mu(t)=\chi(t),$$

即

$$\mu(t)-\int_0^t K(t, \tau)\mu(\tau)d\tau=-2\chi(t), \qquad (1.11)$$

其中

$$K(t, \tau)=\frac{\phi(t)-\phi(\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)^3}} e^{-\frac{[\phi(t)-\phi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}}.$$

(1.11) 是一个线性积分方程,叫做第二类沃尔泰拉方程. 根据积分方程理论, 当 $\chi(t)$ 连续和曲线 S (即 $\phi(t)$) 满足指数大于 1/2 的正则条件时, (1.11) 有唯一的连续解, 把这个解代入 (1.10), 便得到问题 (II) 的解.

§ 3 有界杆热传导问题

讨论两端可动的有界杆热传导第二边值问题:

$$\text{(III)}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad \phi_1(t)<x<\phi_2(t), \ 0<t<T; & (1.12)\\ u(x, 0)=0, \quad \phi_1(0)\leqslant x\leqslant\phi_2(0); & (1.13)\\ \dfrac{\partial u(\phi_i(t), t)}{\partial x}=\chi_i(t), \ 0\leqslant t\leqslant T, i=1, 2; & (1.14)\\ \chi_i(0)=0, \quad i=1, 2. & (1.15)\end{cases}$$

问题 (III) 中杆两端运动的轨迹是由方程

$$x = \psi_i(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad i = 1, 2,$$

所确定的曲线 S_1 和 S_2.

为求解问题 (III), 把解 $u(x, t)$ 写成两个单层热势之和的形式

$$u(x, t) = V^1[\mu_1] + V^2[\mu_2], \tag{1.16}$$

其中热势 V^i 分布在曲线 S_i 上, $i = 1, 2$.

显然, (1.16) 满足 (1.12) 和 (1.13); 为使 (1.16) 成为问题 (III) 的解, 只需依第二章第三节跃度公式 (3.7) 和条件 (1.14) 列出下面两个积分方程:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\mu_1(t)}{2} + V_{xst}^1[\mu_1] + \bar{V}_x^2[\mu_2] = \chi_1(t), \\ \frac{\mu_2(t)}{2} + V_{xst}^2[\mu_2] + \bar{V}_x^1[\mu_1] = \chi_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

其中 $V_{xst}^i[\mu_i]$ 是热势 $V^i[\mu_i]$ 对 x 的导数在曲线 S_i 上的直接值, $\bar{V}_x^i[\mu_i]$ 是热势 $V^i[\mu_i]$ 对 x 的导数在曲线 S_j 上的值, $i=1$ 时 $j = 2$, $i = 2$ 时 $j = 1$.

(1.17) 是一个第二类沃尔泰拉积分方程组, 当曲线 S_1 和 S_2 满足指数大于 1/2 的正则条件以及 χ_1 和 χ_2 连续时, 它有唯一的一组连续解 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$. 将其代入 (1.16) 后, 便得到问题 (III) 的解.

在问题 (III) 中, 如果给出的是非齐次热传导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, t), \tag{1.18}$$

那么, 在求解时, 应首先引入面热势 $U[-f]$. 根据第二章第二节基本公式 (2.8), $U[-f]$ 满足方程 (1.18) 和条件 (1.13), 因而, 函数

$$V(x, t) = u(x, t) - U[-f]$$

满足齐次热传导方程. 所以, 为求解 u, 只需求解 V. V 的

边界条件可以由计算得出.

如果问题(III)是第一边值问题，则可采用双层热势；如为第三边值问题，则仍宜用单层热势. 这时，积分方程组(1.17)稍有变化，但是，只要 S_i 满足指数大于 1/2 的正则条件，并且，问题的边值函数是连续的，则这些方程组恒有唯一的一组连续解.

第二节 哥 西 问 题

哥西问题，即无穷长杆热传导初值问题的提法为：求一在半平面 $t>0$, $-\infty<x<\infty$ 上连续的函数 $u(x,t)$，使之满足热传导方程

$$u_{xx}=u_t,\qquad t>0,\ -\infty<x<\infty \tag{2.1}$$

及始值条件

$$u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<\infty. \tag{2.2}$$

从基本解的性质出发，我们设法把初值问题的解视为某种热源以某种方式作用的结果. 以前所讨论的热源形式都不可能充当上述的热源：事实上，分布在有限空间区域的热源有一个共同的简单性质，即当 $t=T$ 固定时，这些热源的温度影响函数(基本解或热势)在 $x=\pm\infty$ 均取零值. 因而，当 $\varphi(\pm\infty)\neq 0$ 时，这些函数都不能做为初值问题的解；另一方面，由于初值条件(2.2)是给在全杆上的，因此，我们自然要讨论分布在全杆上的热源，即连续分布的无限热源.

我们把杆分为无穷多段，并把在每小段杆上作用的热源视为瞬时点热源，然后再把这些点热源的影响函数叠加起来. 所得的结果将给出初值问题的解，也就是说，我们设法把初值问题的解表示成无限热源瞬时作用的结果.

假定 $\varphi(x)$ 为连续函数. 从 ξ 到 $\xi+\Delta\xi$ 一小段杆的温

度由零度升高到 $\varphi(x)$ 时需要的热量是

$$Q_\Delta = c\rho\int_\xi^{\xi+\Delta\xi}\varphi(x)dx \simeq c\rho\varphi(\bar{\xi})\Delta\xi,\ \xi\leqslant\bar{\xi}\leqslant\xi+\Delta\xi,$$

这里 c 和 ρ 为杆的比热和密度.

将此视为一强度为 Q_Δ 的瞬时点热源，则其对全杆的温度影响为

$$\frac{Q_\Delta}{c\rho}\ G(x,t;\xi,0)=\frac{Q_\Delta}{c\rho}\ G(x,t;\xi)$$
$$=G(x,t;\xi)\varphi(\bar{\xi})\Delta\xi,$$

把所有这些函数叠加起来,便构成无限热源对杆的温度影响

$$\sum_{\Delta\xi}G(x,t;\xi)\varphi(\bar{\xi})\Delta\xi,$$

或者,当 $\Delta\xi\to 0$ 时有

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t;\xi)\varphi(\xi)d\xi, \qquad (2.3)$$

它叫做泊阿松积分,表示强度为 $c\rho\varphi(x)$ 的无限热源瞬时作用的温度影响函数. 现在,我们证明:

当 $\varphi(x)$ 有界时，泊阿松积分 (2.3) 为初值问题 (2.1)(2.2) 的有界解. 当 $t=0$ 时，在所有 $\varphi(x)$ 连续的点上，积分(2.3) 连续取值 $\varphi(x)$.

证明:

设 $|\varphi(x)|\leqslant\varphi_0,\qquad -\infty<x<\infty.$

这时,

$$|u(x,t)|\leqslant\varphi_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi$$
$$=\varphi_0\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta=\varphi_0.$$

所以,(2.3) 所定义的函数 $u(x,t)$ 是有界的. 这个不等式有简单的意义: 强度有限的无限热源瞬时作用后，杆上的最高

温度不超过杆在初始时刻的最高温度.

为证明 (2.3) 满足 (2.1), 只需证明可在积分号下微分 (2.3).

设 (x_0, t_0) 为任一固定点, $t_0 > 0$. 为证明

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ t=t_0}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G(x_0, t_0; \xi)}{\partial x} \varphi(\xi) d\xi, \qquad (2.4)$$

只需证明下面两个积分:

$$\int_{x_1}^{\infty} \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{(x_0, t_0)} \varphi(\xi) d\xi \qquad (2.5)$$

和

$$\int_{-\infty}^{-x_1} \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{(x_0, t_0)} \varphi(\xi) d\xi \qquad (2.6)$$

在 (x_0, t_0) 附近的一致收敛性, 其中 $x_1 > |x_0|$ 为一足够大的正数.

假定 $|x_0| \leqslant \bar{x} \ll x_1$, $0 < t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2$, 则

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{(x_0, t_0)} = O\left(\frac{|\xi| + \bar{x}}{t_1^{3/2}} e^{-\frac{(\xi-\bar{x})^2}{4t_2}}\right),$$

它保证了积分 (2.5)、(2.6) 的一致收敛性; 类似地可以证明 $\partial^2 u/\partial x^2$ 和 $\partial u/\partial t$ 均可在 (2.3) 的积分号下直接计算. 所以, (2.3) 满足 (2.1).

现设 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续. 我们证明, 当 $t \to 0$, $x \to x_0$ 时,

$$\lim_{t\to 0, x\to x_0} u(x, t) \to \varphi(x_0).$$

设

$$x_0 - \eta < x < x_0 + \eta, \eta > 0.$$

将 (2.3) 写成

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{x_0-\eta} G\varphi d\xi + \varphi(x_0)\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} G d\xi +$$

$$+\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} G[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]d\xi+\int_{x_0+\eta}^{\infty} G\varphi d\xi$$

$$=p_1+p_2+p_3+p_4,$$

上式各积分依次记为 $p_i, i=1, 2, 3, 4$.

不难看出,

$$\lim_{t\to 0, x\to x_0} p_2=\frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2}d\zeta=\varphi(x_0).$$

现在证明:

$$\lim_{t\to 0, x\to x_0} p_i=0, \qquad i=1, 3, 4.$$

由于 $\varphi(x)$ 在 x_0 处连续，故当 $\eta\to 0$ 时，$\varphi(\xi)-\varphi(x_0)$ 足够小,所以,

$$\lim_{t\to 0, x\to x_0} p_3=0;$$

p_1 和 p_4 可以相仿地估值

$$p_1=O(\varphi_0\int_{-\infty}^{\frac{x_0-\eta-x}{2\sqrt{t}}} e^{-\zeta^2}d\zeta)\to 0, \qquad t\to 0, x\to x_0.$$

至此，我们证明了：若 $\varphi(x)$ 有界，则泊阿松积分 (2.3) 为初值问题 (2.1)、(2.2) 的有界解.

从证明的过程中可见，当无限热源的强度 $c\rho\varphi(x)$ 连续有界时，则在其作用的瞬时，杆上温度为 $\varphi(x)$. 如果代替 (2.2) 给出的初值条件为

$$u(x, t_0)=\varphi(x),$$

则始值问题的解仍为 (2.3)，但其中的 $G(x, t; \xi)$ 应换为 $G(x, t; \xi, t_0)$.

从证明过程中还可以看出，如果 $\varphi(x)$ 为有界逐段连续函数，则 (2.3) 仍是哥西问题的有界解，它在开半平面 $t>0$ 和 $\varphi(x)$ 的所有连续点处连续.

第四章　极 值 原 理

第一节　极值原理和极值点热流方向定理

§1　极值原理

在第一章第二节曾指出，瞬时点热源作用后，在任何时刻，热源作用点的温度最高.

单层热势 $V[\mu]$ 是强度为 $c\rho\mu$ 的点热源连续作用的温度影响函数. 如果 $\mu \geqslant 0$, 热量由热源作用点不断流向杆两端，因而，在每一时间，热源作用点处温度最高. 如果在热源作用点移动的曲线 S 左（右）侧某曲边梯形 g 内讨论 $V[\mu]=V(x, t)$, 则其最大值 $\max\limits_{\bar{g}} V(x, t)$ 只在这个区域的右(左)侧曲边上达到. 此外, V 的最小值为零, 在 g 的下底边上达到. 将 g 的侧边和下底边共同记为 Γ, 则有

$$\min_{\Gamma} V \leqslant V(x, t) \leqslant \max_{\Gamma} V, \quad (x, t) \in \bar{g}. \tag{1.1}$$

对于双层热势也成立上述极值不等式，看来并不十分直观. 然而，我们已讨论过下述事实.

1)　瞬时热偶极子作用后，作用点温度恒为零，并是其左侧或右侧温度的极值.

2)　偶极子矩为常量的固定热偶极子连续作用后，作用点处温度仍是其左侧或右侧温度的极值，这从第二章第三节中(3.4′)式可直接看出.

这样，我们发现，在一定的条件下，对于曲线热势成立极值不等式(1.1)；另一方面，曲线热势满足齐次热传导方程.

我们自然提出一个问题,是否它的任何解都有这种性质呢?这个问题的回答是肯定的.

若 $u(x, t)$ 在 $\bar{g}$ 内连续，并在开区域 g 内满足齐次热传导方程

$$u_t = u_{xx}, \tag{1.2}$$

则称 u 为区域 g 上的**热传导函数**.

极值原理 对任何热传导函数 u,在 $\bar{g}$ 内极值不等式

$$\min_{\Gamma} u \leqslant u(x, t) \leqslant \max_{\Gamma} u, \qquad (x, t) \in \bar{g} \tag{1.3}$$

恒成立.

证明:

不妨只讨论 $u \leqslant \max\limits_{\Gamma} u$ 的情形. 取足够大的正数 N, 使在 $\bar{g}$ 内

$$\bar{u} = u + N > 0,$$

这时, $\bar{u}$ 仍为热传导函数.

考虑替换

$$\bar{u}(x, t) = v(x, t)e^{\alpha t},$$

$\alpha > 0$ 为任意实数. 显然, v 满足

$$v_t = v_{xx} - \alpha v. \tag{1.4}$$

因为 u 在 $\bar{g}$ 内连续,所以, v 在 $\bar{g}$ 内有最大值 $\max v$. 设

$$v(x_0, t_0) = \max_{\bar{g}} v(x, t).$$

我们证明, (x_0, t_0) 只能在 Γ 上.

事实上,若 $(x_0, t_0) \bar{\in} \Gamma$, 则在此点

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0.$$

这时,从 (1.4) 中推出,在 (x_0, t_0) 点 $\alpha v \leqslant 0$, 即

$$\max_{\bar{g}} v \leqslant 0,$$

这与 $\bar{u}$ 在 $\bar{g}$ 内取正值相矛盾. 所以, (x_0, t_0)必属于 Γ, 且

$$\max_{\bar{g}} v = \max_{\Gamma} v \geqslant 0.$$

由于

$$v = \bar{u} e^{-\alpha t},$$

故

$$\max_{\Gamma} v \leqslant \max_{\Gamma} \bar{u}.$$

因为

$$\bar{u} = V e^{\alpha t},$$

所以

$$\bar{u} \leqslant V e^{\alpha T},$$

$$\max_{\bar{g}} \bar{u} \leqslant e^{\alpha T} \max_{\Gamma} V \leqslant e^{\alpha T} \max_{\Gamma} \bar{u},$$

但上式对任何 $\alpha > 0$ 均成立,故当 $\alpha \to 0$ 时有

$$\bar{u} = u + N \leqslant \max_{\Gamma} \bar{u} = \max_{\Gamma}(u + N) = \max_{\Gamma} u + N,$$

由此推得 (1.3) 的正确性.

推论 设D为由 (x, t) 平面上两条直线 $t = 0$、$t = T$ 和曲线 S 所界的位于 S 右侧的半无限区域. 若 $\bar{D}$ 上的热传导函数 $u(x, t)$ 在无穷远处关于 $t(0 \leqslant t \leqslant T)$ 一致地趋于零,则

$$\max_{\bar{D}} |u(x, t)| \leqslant \max\{\max_{S} |u|, \max_{\psi(0) < x < \infty} |u(x, 0)|\}.$$

极值原理的意义很明显: 当杆内没有热源、杆侧面绝热时,如果杆两端的温度和杆在初始时刻的温度不超过 M,那么,任何时刻杆内部的温度不可能高于 M.

在推导 (1.2) 时曾指出过,杆的侧面是绝热的 (第一章第一节). 正是在这种情况下成立极值原理. 如果杆从周围介质得到热量,那么,极值原理就可能不成立,杆上的最高温度完全可能在杆内部达到. 函数

$$u = \sin x \cdot e^{t}$$

在矩形区域 $g = \{0 < x < \pi, 0 < t < T\}$ 内满足方程

$$u_t = u_{xx} + 2u,$$

其最大值只在 g 的上底边 $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $t_0 = T$ 处达到. 从第一章第一节中关于方程

$$u_t = a^2 u_{xx} + bu + f(x, t)$$

的推导过程中可以看出,当杆失去热量时,上述方程中 u 的系数为负数,如果 u 的系数为正数(在上例中它等于 2),则说明杆从周围介质得到热量.

极值原理描写了热传导函数的重要性质. 对于非齐次热传导方程,即便杆侧面绝热时,极值原理 (1.3) 仍然可能不成立. 事实上,上述例子中的函数 u 也是非齐次热传导方程

$$u_t = u_{xx} + f(x, t) = u_{xx} + 2e^t \sin x$$

的解,它的极值不在 g 的边界上达到. 非齐次热传导方程描写的是杆内部有热源作用的情形. 显然,热源的存在,会破坏极值原理.

我们把极值原理的意思再重复一下: 热传导函数的极值一定可以在曲边梯形 g 的边界(不包括上底)上达到.

然而,区域 g 内部是否也有热传导函数的极值呢? 显然: $u \equiv$ 常数是热传导函数,它的极值遍及整个区域 g. 但是,如果 $u \not\equiv$ 常数时,极值点是否一定在边界上呢? 从对曲线热势在特定条件下的讨论可以推想,这个问题的回答是肯定的,即不为常数的热传导函数的极值点只分布在区域的边界上,这个论断称为强极值原理[1].

强极值原理 若 g 上的热传导函数 $u(x, t)$ 在某内点 $P_0 = (x_0, t_0) \in g$ 达到最大值

$$\max_{\bar{g}} u = u(p_0) = M,$$

1) 参见文献[4].

则

$$u(x, t)|_{t<t_0} \equiv M.$$

由此推得，在从初始时刻起的任何足够小的时间段内，若热传导函数 u 均不为常数，则其极值只落在区域边界上.

这个原理的证明较长，有兴趣的读者，可参阅附录一.

§2 极值点热流方向定理

如果在分布曲线 S 某侧一曲边梯形 g 内研究非负密度的单层热势，则其最大值只在 S 上出现. 由于 S 是热源作用点的轨迹，在最大值处热源放热，热量由此向杆两端流动. 因而，此处热流一定不为零. 同时，如果只讨论 S 某侧一段杆时，则极大值处热流方向永远指向杆内部. 再考虑到傅立叶热流定律(第一章第一节)，可见：如果单层热势 $V[\mu]$ 在 g 的左侧边上达到最大值，则此处 $\partial V/\partial x < 0$；如在右侧边上有最大值，则此处 $\partial V/\partial x > 0$. 如果 μ 是非正的，那么，热源吸热，热流方向与上述方向相反，热势最小值处热流的符号(即 $\partial V/\partial x$ 的符号)也与上述符号相反. 当热源固定不动时，上述推论容易证实. 此时，S 为一直线，$V_{xst} = 0$，根据跃度公式(第二章第三节(3.7))，在 V 的极值点处

$$\frac{\partial V[\mu]}{\partial x} = \pm \frac{\mu}{2}.$$

现在，我们证明下面的指明热传导函数极值点处热流方向的定理[1].

极值点热流方向定理

假设

1) 曲边梯形区域 g 的两侧边 S_1 及 S_2 为二次连续可微

---

1) 参见文献[6].

曲线，并且，它们没有水平方向的切线；

2) 热传导函数 $u(x, t)$ 在右侧边 S_2 上取最大值：

$$\max_{\bar{g}} u = u(P_0) = M, \qquad P_0 = (x_0, t_0) \in S_2;$$

3) 当 $t \leqslant t_0$ 时，u 不恒为常数；

4) $\partial u / \partial x$ 在 $\bar{g}$ 内连续；

那么，

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0} > 0. \tag{1.5}$$

证明：

在 P_0 点做一内切于 S_2 的圆 C，使 $C \in g$，C 的边界为 Γ，半径为 R。

根据强极值原理和本定理第三个条件，在 C 内部高于 P_0 的地方 u 不可能取最大值 M；但在 P_0 以下的 C 的内点处，u 可能取 M 值；然而，这时可以再缩小 R，使圆 $\bar{C}$ 内除去 P_0 外再没有使 u 达到 M 值的点。

现把坐标原点移到 C 的圆心 O 处．并以 P_0 为心再做一半径为 $R_1 < R$ 的圆 C'，其边界为 Γ'．记 C 与 C' 之交为 D。

在 D 内讨论辅助函数

$$V = e^{-\alpha(x^2+t^2)} - e^{-\alpha R^2}.$$

容易证明，在 C 内 $v > 0$；在 Γ 上 $v = 0$；当 α 足够大时，在 D 内 $Lv < 0$。

在 D 内再讨论辅助函数

$$w = u + \varepsilon v, \qquad \varepsilon > 0.$$

显然，$Lw < 0$，并且，w 在 D 上的最大值只能在 D 的边界上达到．D 的边界由两部分弧组成：在 Γ 的一段弧上，$w = u$；在 Γ' 的一段弧上，$u < M$，因而，可取 ε 足够小，使 $w < M$．也就是说，w 在 D 的边界上的最大值仍为 M，且只在 P_0 处达

到. 这时,

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} \geqslant 0,$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - 2\alpha R \varepsilon e^{-\alpha R^2} \geqslant 0,$$

所以,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \geqslant 2\alpha R \varepsilon e^{-\alpha R^2} > 0.$$

于是,(1.5) 得证.

用上述方法同样讨论 $P_0 \in S_1$ 以及 $u(P_0)$ 为最小值的情形.

第二节 各种热传导问题解的适定性

§1 各种边值问题的解的唯一性

讨论第一边值问题:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} Lu = u_t - u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in g; \\ u|_{s_i} = \chi_i(t), & t \in l = [0, T], i = 1, 2; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k = [\psi_1(0), \psi_2(0)]. \end{cases}$$

若 u_1, u_2 同为此问题的解,则

$$v = u_1 - u_2$$

为热传导函数,其始值边值均为零. 因此,由极值原理推得,在 $\bar{g}$ 内 $v \equiv 0$,即第一边值问题的解是唯一的.

讨论第二边值问题:

$$(\mathrm{II})\begin{cases} Lu = f(x, t), & (x, t) \in g; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{s_i} = \chi_i(t), & t \in l; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k. \end{cases}$$

假定曲边 S_1 及 S_2 是连续可微的. 若 u_1, u_2 为此问题的两个解,并且,它们在 $\bar{g}$ 内有对 x 的连续导数,则

$$v = u_1 - u_2$$

为一热传导函数,同时,

$$v|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{S_i} = 0, \ i = 1,2.$$

如果在 $\bar{g}$ 内 $v \neq 0$, 则依极值原理, v 应在 g 的两侧边或下底边某 P_0 点处取最大值, 不妨设此最大值为正数; 否则可设 $v = u_2 - u_1$. 这样, P_0 只能在两侧边 S_i 上; 但是, 根据极值点热流方向定理,

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} \neq 0.$$

所以,在 $\bar{g}$ 内 $v \equiv 0$, 即第二边值问题的解是唯一的.

讨论第三边值问题:

$$(\mathrm{III})\begin{cases} Lu = f(x, t), & (x, t) \in g; \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha_i(t) u\right)_{S_i} = \chi_i(t), & t \in l, i = 1, 2; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k. \end{cases}$$

设两侧边 S_1 和 S_2 为连续可微曲线,并设

$$\alpha_1(t) \leqslant 0, \qquad \alpha_2(t) \geqslant 0, \qquad t \in l.$$

如果 u_1 和 u_2 为此问题的两个解, 并且, 它们在 $\bar{g}$ 内有连续的对 x 的导数,则

$$v = u_1 - u_2$$

为热传导函数,同时,

$$v(x, 0) = 0,$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_i v\right]_{S_i} = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{2.1}$$

不妨设 v 在 S_2 的 P_0 处取正的最大值,由极值点热流方向定理

有

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} > 0, \qquad v|_{P_0} > 0,$$

因此

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_2 v\right)_{P_0} > 0,$$

这与 (2.1) 矛盾！这个矛盾证明了第三边值问题解的唯一性.

§2 哥西问题解的唯一性

从第三章第二节中的讨论可见，当无限热源的强度 $c\rho\varphi(x)$ 不取负值时，则其瞬时作用的温度影响函数

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi)\varphi(\xi)d\xi \tag{2.2}$$

也不取负值. 我们现在严格证明这个结论.

引理 1 设 $u(x, t)$ 是哥西问题

$$\begin{cases} Lu = 0, & t > 0, -\infty < x < \infty; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty; \end{cases} \tag{2.3}$$

的有界解，如果 $\varphi(x) \geqslant 0$，则

$$u(x, t) \geqslant 0, \qquad t \geqslant 0.$$

证明:

任取一点 $P_0(x_0, t_0)$，$t_0 \geqslant 0$，我们证明

$$u(P_0) \geqslant 0. \tag{2.4}$$

讨论辅助函数

$$w = u + \varepsilon t(K + x^2).$$

显然，当 $K > 2$，$t_0 = T_0$，$t \leqslant t_0$ 时

$$Lw > 0.$$

由于 u 有界，故当 $|x_\varepsilon| > |x_0|$ 足够大时，在以 $x = \pm x_\varepsilon$ 为侧

边、$t=0$为下底、$t=T_0$为上底的矩形边界上(指除上底边)$w\geqslant 0$，因而在整个矩形内

$$w\geqslant 0,$$

特别地，

$$w(P_0)\geqslant 0,$$

即

$$u(P_0)\geqslant -\varepsilon t_0(K+x_0^2);$$

当$\varepsilon\to 0$时，得到(2.4).

引理 2 设$u(x,t)$为哥西问题(2.3)的有界解，若

$$M=\max_{-\infty<x<\infty}\varphi(x),$$

则

$$|u(x,t)|\leqslant M,\qquad t\geqslant 0.$$

引理的意义在第三章第二节中说明过，它的证明也很简单.

讨论函数$v_1=u+M$. 根据引理1，$v_1\geqslant 0$，即$u\geqslant -M$；但是，$v_2=M-u$也满足引理1的条件，因此，$v_2\geqslant 0$，即$u\leqslant M$. 所以，$|u|\leqslant M$在上半平面$t\geqslant 0$恒成立.

应用引理2，不难证明哥西问题的有界解的唯一性.

§3 基本解的唯一性

从上面的讨论可见，当$\varphi(x)$为有界逐段连续函数时，哥西问题的解仍然是唯一的，并且，这唯一的解仍可由泊阿松积分表示.

在第一章第二节中曾指出，当瞬时点热源以线性方式形成时，$G(x,t;\xi,\tau)$是其温度影响函数. 现在假定热源作用瞬时为τ，作用点为ξ，并且，热源以任一允许的方式形成，则其温度影响函数应是下面哥西问题的解

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > \tau + \Delta\tau, -\infty < x < \infty; \\ u\big|_{t=\tau+\Delta\tau} = \varphi(x) = \begin{cases} 0, x > \xi + \Delta\xi, x < \xi - \Delta\xi, \\ u_\Delta(x) > 0, \xi - \Delta\xi < x < \xi + \Delta\xi, \end{cases} \end{cases}$$

根据第三章第二节的结果，这个哥西问题的唯一解可表示为泊阿松积分

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \eta, \tau + \Delta\tau)\varphi(\eta)d\eta$$

$$= \int_{\xi-\Delta\xi}^{\xi+\Delta\xi} G(x, t; \eta, \tau + \Delta\tau)u_\Delta(\eta)d\eta,$$

当 $\Delta\tau$ 足够小时，

$$u(x, t) = G(x, t; \xi^*, \tau + \Delta\tau)\int_{\xi-\Delta\xi}^{\xi+\Delta\xi} u_\Delta(\eta)d\eta$$

$$= G(x, t; \xi^*, \tau + \Delta\tau), \xi - \Delta\xi \leqslant \xi^* \leqslant \xi + \Delta\xi.$$

因为当 $\Delta\tau \to 0$ 时，$\Delta\xi \to 0$，故

$$\lim_{\Delta\tau\to 0} u(x, t) = G(x, t; \xi, \tau).$$

这就证明了 $G(x, t; \xi, \tau)$ 是以任何方式形成的瞬时点热源的温度影响函数，所以，它是热传导方程的唯一的基本解。

§4 各种热传导问题的解对初始条件和边界条件的连续依赖性

实践中所提出的各种热传导问题中的已知条件都不会是绝对精确的，而是在某种意义下的近似．因此，这些问题的解也不可能是绝对准确的． 我们必须讨论这些问题的适定性，即它们的唯一性及解对初始条件和边界条件的依赖程度．应用起来最方便的情况是：只要初始条件和边界条件在某种意义下足够近似，那么，相应的解也足够地近似，即解连续地依赖于初始条件和边界条件．

1） 第一边值问题

现讨论第 1 段中的问题 (I). 设 $u(x, t)$ 为问题 (I) 的解, $u^*(x, t)$ 为相应于初始条件 $\varphi^*(x)$ 及边界条件 $\chi_i^*(t)$ 的解.

由极值原理不难看出,若

$$\max\{\max_{x\in k}|\varphi(x)-\varphi^*(x)|,\ \max_{t\in l}|\chi_1(t)-\chi_1^*(t)|,\ \max_{t\in l}|\chi_2(t)-\chi_2^*(t)|\}\leqslant\varepsilon,$$

则在 g 内

$$|u(x,t)-u^*(x,t)|\leqslant\varepsilon, \qquad (2.5)$$

这便是第一边值问题的解对初始条件和边界条件的连续依赖问性.

2) 第二边值问题

我们只在 $\chi_i(t)=0\ (i=1,2)$ 的条件下讨论第 1 段中题 (II), 并假定 S_i 连续可微, $i=1, 2$.

设 $u(x, t)$ 为齐次边值条件下问题 (II) 的解, $u^*(x, t)$ 为同样情况下的相应于初始条件 $\varphi^*(x)$ 的问题 (II) 的解,若

$$\max_k|\varphi(x)-\varphi^*(x)|\leqslant\varepsilon,$$

则在 g 内

$$|u-u^*|\leqslant\varepsilon.$$

事实上, 由于 $u-u^*$ 为热传导函数,故其极值只能在 Γ 上取得,然而,

$$\left.\frac{\partial(u-u^*)}{\partial x}\right|_{S_i}=0, \qquad i=1,2,$$

所以,极值只能在 k 上达到,因而

$$|u-u^*|\leqslant\max_k|\varphi(x)-\varphi^*(x)|\leqslant\varepsilon.$$

这样,对于齐次边值条件的第二边值问题而言,在 g 内有连续的对 x 的导数的解是连续地依赖于初始条件的.

对于非齐次边值条件的第二边值问题, 我们将在第二部

分第一章中在另外的度量意义下讨论它的适定性.

3) 第三边值问题

为讨论第三边值问题的适定性,证明下述引理.

引理 3 设 S_1 及 S_2 连续可微, $u(x, t)$ 在 g 内有连续的对 x 的导数,并为第 1 段中问题 (III) 的解,而且

$$\begin{cases}\alpha_1(t) < 0, \\ \alpha_2(t) > 0,\end{cases} \qquad t \in l = [0, T],$$

那么,在 g 内对 $u(x, t)$ 成立估值

$$u(x, t) \leqslant \max\left\{\max_k |\varphi(x)|, \frac{\max\limits_l |\chi_1(t)|}{\min\limits_l |\alpha_1(t)|}, \frac{\max\limits_l |\chi_2(t)|}{\min |\alpha_2(t)|}\right\}. \tag{2.6}$$

证明:

u 的极值或在 k 上达到,或在 $S_1 + S_2$ 上达到.

当 u 的极值在 k 上达到时,则

$$|u| \leqslant \max_k |\varphi(x)|.$$

讨论 u 的极值在 $S_1 + S_2$ 上达到的情况. 不妨设 u 在 S_1 上 P_0 点达到正的最大值,这时

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} < 0, \qquad \alpha_1(P_0) < 0, \qquad u(P_0) \geqslant 0,$$

所以,在 P_0 点

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_1 u = \chi_1 < 0,$$

因而,

$$|\alpha_1 u| \leqslant |\chi_1|.$$

故

$$|u| \leqslant \frac{\max|\chi_1|}{\min|\alpha_1|}.$$

类似地可以讨论 u 的极值发生在 S_2 上的情形. 于是, (2.6) 得证.

估值 (2.6) 给出了第三边值问题解对初始条件和边界条件的连续依赖性.

第五章　热势的光滑性

第一节　B 函数类

§1　$C^{(n,\alpha)}$ 函数类

定义 1　设连续函数 $F(t)$ 定义在区间 $l=[0,T]$ 上，t_1、t_2 是这个区间中任意二点．如果能找到常数 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 和 $A>0$，使得

$$\frac{|F(t_1)-F(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}}\leqslant A \tag{1.1}$$

对任意的 t_1 和 t_2 均成立，则称函数 $F(t)$ 在 l 上满足指数为 α 的荷尔德条件，或正则条件；所有满足 (1.1) 的常数 A 中有一个最小者，它等于

$$\sup_{\substack{t_1\in l\\ t_2\in l}}\left\{\frac{|F(t_1)-F(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}}\right\}=F_{\alpha},$$

常数 F_α 叫做函数 $F(t)$ 的荷尔德系数，或正则系数．常数 α 叫 $F(t)$ 的荷尔德指数，或正则指数[1]．

满足正则条件的函数称为正则连续函数．

不难证明，当 F_1 和 F_2 满足指数为 α 的正则条件时，

$$F_1\pm F_2,\qquad cF_1,\qquad F_1\cdot F_2,\qquad F_1/F_2$$

均满足指数为 α 的正则条件，此处 $c=$ 常数，$F_2\neq0$．

定义 2　如果函数 $F(t)$ 在 $l=[0,T]$ 上有直到 n 阶的

---

1) 当 t_1 固定、t_2 在 t_1 邻域中变动时，若 $F(t)$ 满足 (1.1)，则称 $F(t)$ 在 t_1 点满足正则条件．

连续导数，并且，$F(t)$ 的 n 阶导数在 l 上满足指数为 α 的正则条件，则称 $F(t)$ 为 l 上的 $C^{(n,\alpha)}$ 类函数，或称 F 在 l 上属于 $C^{(n,\alpha)}$ 类，并记作 $F\in C^{(n,\alpha)}(l)$，或简写为 $F\in C^{(n,\alpha)}$，$F\in(n,\alpha)$.

当 $F(t)$ 是 l 上的 $C^{(n,\alpha)}$ 类函数时，将其绝对值在 l 上的最大值记为

$$F_0=\max_{0\leqslant t\leqslant T}|F(t)|,$$

其 n 阶导数的正则系数记为 $F_{n,\alpha}$. 我们称

$$\|F\|_{C^{(n,\alpha)}(l)}=\|F\|_{(n,\alpha)}=F_0+F_{n,\alpha} \tag{1.2}$$

为函数 $F(t)$ 在 $C^{(n,\alpha)}$ 类中的模.

容易看出，由 (1.2) 定义的模有下述三个性质(它们称为模的性质)：

1）若 $\|F\|_{C^{(n,\alpha)}}=0$，则 $F(t)\equiv 0$，反之亦然；

2）$\|cF\|_{C^{(n,\alpha)}}=|c|\,\|F\|_{C^{(n,\alpha)}}$，$c=$ 常数；

3）$\|F_1+F_2\|_{C^{(n,\alpha)}}\leqslant\|F_1\|_{C^{(n,\alpha)}}+\|F_2\|_{C^{(n,\alpha)}}$.

定义 3 设曲线 S 由方程

$$X=\psi(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

所确定. 如果函数 $\psi(t)$ 在 l 上属于 $C^{(n,\alpha)}$ 类，则称曲线 S 为 **$C^{(n,\alpha)}$ 类曲线**，或属于 $C^{(n,\alpha)}$ 类，并记作 $S\in C^{(n,\alpha)}$ 或 $S\in(n,\alpha)$.

§2 (p,q,α,β) 函数类

定义 4 设 g 为 (x,t) 平面上一有界区域，p，$q\geqslant 0$ 为正整数，$0\leqslant\alpha$，$\beta\leqslant 1$. 连续函数 $\Phi(x,t)$ 定义在 g 内.

如果 $\Phi(x,t)$ 有连续的导数

$$\frac{\partial^{p+q}\Phi(x,t)}{\partial x^p\partial t^q},$$

并且

$$\Phi_{(p,q,\alpha,\beta)} = \sup_{\substack{(x_1,t_1)\in g\\(x_2,t_2)\in g}} \left\{ \frac{\left| \frac{\partial^{p+q}\Phi(x_1, t_1)}{\partial x^p \partial t^q} - \frac{\partial^{p+q}\Phi(x_2, t_2)}{\partial x^p \partial t^q} \right|}{|x_1 - x_2|^\alpha + |t_1 - t_2|^\beta} \right\}$$

为一有限量，则称函数 $\Phi(x, t)$ 在 g 上属于 (p, q, α, β) 类，记作 $\Phi \in (p, q, \alpha, \beta)$.

当 $\Phi \in (p, q, \alpha, \beta)$ 时，定义

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{(p,q,\alpha,\beta)} &= \Phi_{(p,q,\alpha,\beta)} + \max_{(x,t)\in g} |\Phi(x, t)| \\ &= \Phi_{(p,q,\alpha,\beta)} + \Phi_0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

为 Φ 在 (p, q, α, β) 类中的模. 显然，这样定义的模满足模的三个性质.

§3 *B* 函数类

定义 5 设 $n \geqslant 0$ 为整数，$0 \leqslant \lambda < 1$. $B^{(n,\lambda)}$ 函数类是 $(n+1)$ 个函数类 (p, q, α, β) 之交，这些 (p, q, α, β) 由下面的关系式决定:

$$p = 0, 1, 2, \cdots, n; \tag{1.4}$$

$$q = \left[\frac{n-p}{2}\right]; \tag{1.5}$$

$$\alpha = 2\beta = \lambda, \quad p = n, n-2, n-4, \cdots\cdots \tag{1.6}$$

$$\alpha = 2\beta - \lambda = 1, \quad p = n-1, n-3, n-5, \cdots\cdots \tag{1.7}$$

这里用 $[\gamma]$ 表示 $\gamma \geqslant 0$ 的整数部分.

$B^{(n,\lambda)}$ 函数类中的模定义为

$$\|\Phi\|_{B^{(n,\lambda)}(g)} = \|\Phi\|_{B^{(n,\lambda)}} = \max_{(p,q,\alpha,\beta)} \{\|\Phi\|_{(p,q,\alpha,\beta)}\} \tag{1.8}$$

显然，这样定义的模满足模的三个性质.

为叙述以后的结果方便起见，我们特别定义函数类 $B^{(n,1)}$, $n \geqslant 0$.

函数类 $B^{(n,1)}$ 仍用 (1.4)—(1.7) 式定义;但是,此时 (1.6) 中$\beta=\frac{1}{2}$,而 $\alpha<1$ 是任意的; (1.7) 中的$\alpha=1$, 而$\beta<1$ 是任意的.

这样定义的 $B^{(n,1)}$ 类函数的模仍由 (1.8) 确定. 这时,它依赖于 (1.6) 中的 α 和 (1.7) 中的 β 的选择.

$B^{(n,\lambda)}$ 函数类通常简称为 B 函数类.

§4 B 函数类的合理性

如果从导数 D_1u 的存在能推得另一导数 D_2u的存在, 则称 D_2u 的级低于 D_1u 的级. $u(x,t)$ 的所有导数中级别最高的那些导数叫做 u 的最高阶导数. 设 D_3u 为 u 的某导数, 若 $\partial D_3u/\partial x$ 为 u 的一个最高阶导数, 则称 D_3u 为 u 的一个次高阶导数.

讨论
$$u_{xx}=u_t \tag{1.9}$$
假设方程 (1.9) 的解 $u(x,t)$ 对 x 可导 n 次 ($n\geqslant 2$). 这时, 由 (1.9) 推得, u 对 t 可导 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 次, 因此, (1.5) 中 q 的最大值恰恰为$\left[\frac{n}{2}\right]$.

以 $\partial^n u/\partial x^n$ 和 $\partial^{[\frac{n}{2}]}u/\partial t^{[\frac{n}{2}]}$ 的存在为基础,对方程(1.9)进行所有可能的微分,从中得出 $u(x,t)$ 的一系列混合导数. 这些导数中级别最高的恰好是 (1.4) 和 (1.5) 在 $p=n, n-2, n-4,\cdots\cdots$ 时所确定的导数. (1.4) 和 (1.5) 所确定的其它导数都是 $u(x,t)$ 的次高阶导数. 因此,如果方程 (1.9) 的解 $u(x,t)$ 对 x 可微 n 次,那么,它必然具有由 (1.4) 和 (1.5) 所规定的最高阶导数和次高阶导数.

其次,假定 $\partial^n u/\partial x^n$ 对 x 满足指数为 λ 的正则条件,考虑到 x 和 t 的“相当关系”,还假定它对 t 满足指数为 $\lambda/2$ 的正

则条件，即假定 $u(x,t)$ 属于 $\left(n,0,\lambda,\frac{\lambda}{2}\right)$ 类. 此时，从 (1.9) 可以看出，u 的所有最高阶导数均与 $\partial^n u/\partial x^n$ 满足同样的正则条件. 因此，在 (1.6) 中假定 $\alpha=2\beta=\lambda$. u 的次高阶导数 $\partial^{n-1}u/\partial x^{n-1}$ 具有对 x 满足指数为 λ 的正则条件的导数，考虑到 x 和 t 的"相当关系"，自然还假定它对 t 满足指数为 $(1+\lambda)/2$ 的正则条件，即假定 u 属于 $\left(n-1,0,1,\frac{1+\lambda}{2}\right)$ 类. 这时，由 (1.9) 看出，u 的所有次高阶导数均满足同样的正则条件. 所以，在 (1.7) 中规定 $\alpha=1$, $\beta=\frac{1+\lambda}{2}$.

$B^{(n,\lambda)}$ 类定义中不包含 u 的任何非最高阶和非次高阶导数，它们即对 x 可微，又对 t 可微，因而，它们不足以刻画 u 的光滑性.

综上所述，考虑到 x 和 t 的"相当关系"，如果设方程 (1.9) 的解 $u(x,t)$ 同时属于函数类 $\left(n,0,\lambda,\frac{\lambda}{2}\right)$ 和 $\left(n-1,0,1,\frac{1+\lambda}{2}\right)$，那么，它必然同时属于 (1.4)—(1.7) 所确定的所有函数类，因而属于它们的交，即 $B^{(n,\lambda)}$ 函数类. 这样，我们说明了用函数类 $B^{(n,\lambda)}$ 度量热传导方程的解的光滑性是完全合理的和必要的. 热势满足(齐次和非齐次)热传导方程，用 $B^{(n,\lambda)}$ 函数类度量它们的光滑性也是很自然的.

第二节　曲线热势的光滑性

§1　辅助引理

令

$$G_{\alpha\beta}(x,t;\xi,\tau)=\frac{(x-\xi)^\alpha}{(t-\tau)^\beta}e^{-\frac{\eta(x-\xi)^2}{t-\tau}},$$

$$F_{\alpha\beta}(x,t)=\int_0^t G_{\alpha\beta}(x,t;\phi(\tau),\tau)d\tau;$$

设函数 $\phi(t)$ 在区间 $l=[0,T]$ 内连续，$\alpha\geqslant 0$ 是整数，$\beta\geqslant 0$，$\eta>0$.

若 $0<\gamma=\alpha+2-2\beta<1$，则

$$F_{\alpha\beta}(x_1,t)-F_{\alpha\beta}(x_2,t)=O(|x_1-x_2|^{\gamma}); \qquad (2.1)$$

若 $0<\gamma<2$，则

$$F_{\alpha\beta}(x,t_1)-F_{\alpha\beta}(x,t_2)=O(|t_1-t_2|^{\frac{\gamma}{2}}); \qquad (2.2)$$

这里 (x_i,t) 和 (x,t_i) 是任意的，$t,t_i\geqslant 0$，$i=1,2$，并且，(2.1) 和 (2.2) 右端的 O 与 x,t,x_i,t_i 的位置无关.

读者很容易验证这个引理.

推论 1 当 $\gamma=1$ 时，代替 (2.1) 下列估值成立:

$$F_{\alpha\beta}(x_1,t)-F_{\alpha\beta}(x_2,t)=O(|x_1-x_2|^{\gamma'}), \qquad (2.1')$$

其中 $0<\gamma'<1$ 是任意的，这时，(2.1′) 右端的常数 O 依赖于 γ' 的选择；

当 $\gamma=2$ 时，代替 (2.2) 下列估值成立:

$$F_{\alpha\beta}(x,t_1)-F_{\alpha\beta}(x,t_2)=O(|t_1-t_2|^{\gamma''}), \qquad (2.2')$$

其中 $0<\gamma''<1$ 是任意的，这时，(2.2′) 右端的 O 还依赖于 γ'' 的选择.

推论 2 若 $\mu(\tau,t)$ 为对 τ 的有界可积函数，则估值 (2.1) 对积分

$$F_{\alpha\beta}(x,t)=\int_0^t \mu(\tau,t)G_{\alpha\beta}(x,t;\phi(\tau),\tau)d\tau$$

仍正确；当 $\mu(\tau,x)$ 为 τ 的有界可积函数时，估值 (2.2) 对积分

$$F_{\alpha\beta}(x,t)=\int_0^t \mu(\tau,x)G_{\alpha\beta}(x,t;\phi(\tau),\tau)d\tau$$

仍正确.

§2 密度为正则连续函数的曲线热势

1) 密度为有界可积函数或连续函数的曲线热势

如果函数 F 在某函数类 a 中的模 $\|F\|_a$ 与另一函数 f 在某函数类 b 中的模 $\|f\|_b$ 有如下的关系:

$$\|F\|_a \leqslant A\|f\|_b,$$

或

$$\|F\|_a = O(\|f\|_b),$$

其中 $A=$ 常数与函数 F 和 f 无关, 则称 F 在 a 中的模 $\|F\|_a$ 可用 f 在 b 中的模 $\|f\|_b$ 来估值(估计).

设区域 $\overline{D}$ 为 (x, t) 平面上由二直线 $t=0$ 和 $t=T$ 所界的在曲线 $S(x=\phi(t),\ 0\leqslant t\leqslant T)$ 右(左)侧的一个半无限区域. 本节中, 在这种区域 $\overline{D}$ 中, 研究曲线热势的光滑性.

由前段辅助引理立刻推出下述定理.

定理 1 设 $\phi(t)$ 在区间 $l=[0, T]$ 上连续, 密度 $\mu(t)$ 有界可积, 则单层热势 $V[\mu]$ 在 $\overline{D}$ 内属于 $B^{(0,1)}$ 类, 并且, V 在 $B^{(0,1)}(\overline{D})$ 中的模可用 μ 在 l 上的最大值来估计, 同时 $V(x, 0)=0$.

考虑到当 $x\to\infty$ 时, 双层热势 $W[\mu]$ 关于 $t\in l$ 一致地趋向于零, 利用跃度公式和极值原理的推论, 不难证明下述定理.

定理 2 设曲线 $S\in\left(0, \lambda+\frac{1}{2}\right)$ 类, $0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$. 若密度 $\mu(t)$ 在 l 上有界可积, 则双层热势 $W[\mu]$ 在 $\overline{D}$ 内有界; 若 μ 在 l 上连续, 并 $\mu(0)=0$, 则 W 在 $\overline{D}$ 内连续, 它在 $\overline{D}$ 内的最大值可以用 μ 的最大值来估计, 同时, $W(x, 0)=0$.

2） 密度为 $C^{(0,\lambda)}$ 类函数 $\left(0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 的曲线热势

定理3 设曲线 S 属于 $(1,0)$ 类，密度 $\mu(t)$ 在 l 上属于 $(0,\lambda)$ 类，$\mu(0)=0$，$0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$. 这时，双层热势 $W[\mu]$ 在 $\bar{D}$ 内属于 $B^{(0,2\lambda)}$ 类，并且，W 在 $B^{(0,2\lambda)}$ 类中的模可用 μ 在 $(0,\lambda)$ 类中的模来估值，同时，$W(x,0)=0$.

证明

I） 首先讨论 $W[\mu]$ 关于 x 的光滑性. 设 (x,t) 在曲线 S 上，$x=\psi(t)$，$(x_1,t)=(x+h,t)$，$h>0$ 是参数. 先研究单位密度的双层热势 $W_1(x,t)=W[1]$. 根据第二章§3的结果可写出

$$W_1(x_1,t)-W_1(x,t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\psi'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{[x_1-\psi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}}-e^{-\frac{[x-\psi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}}\right]d\tau-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-\psi(0)}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x_1-\psi(0)}{2\sqrt{t}}}e^{-\zeta^2}d\zeta,\quad(2.1)$$

这里的

$$W_1(x,t)=\lim_{(\bar{x},\bar{t})\to(x,t)\in S}W_1(\bar{x},\bar{t}).$$

（见第二章第三节(3.3)，(3.4)及(3.5).）

当 $x\geqslant 0$ 时，

$$e^{-x}=O(x^{\lambda-\frac{1}{2}});$$

所以，

$$\int_{\frac{x-\psi(0)}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x_1-\psi(0)}{2\sqrt{t}}}e^{-\zeta^2}d\zeta=O(t^{-\lambda}h^{2\lambda}).$$

根据辅助引理，(2.1)中第一项有估值 $O(h^{\gamma'})$，$0<\gamma'<1$ 是任意的. 于是，我们证明了

$$W_1(x_1+h,t)-W_1(x,t)=O[h^{2\lambda'}(1+t^{-\lambda})],\quad(2.2)$$

这里当$\lambda < \frac{1}{2}$时，$\lambda' = \lambda$；当$\lambda = \frac{1}{2}$时，$\lambda' < \frac{1}{2}$是任意的.

为证明定理 3，把$W(x, t)$写成

$$W(x, t) = \overline{W}(x, t) + W_1(x, t)\mu(t),$$

$$\overline{W}(x, t) = \int_0^t [\mu(\tau) - \mu(t)] \times$$

$$\times \frac{\partial G(x, t; \phi(\tau), \tau)}{\partial \xi} d\tau. \qquad (2.3)$$

因为$\mu \in (0, \lambda)$，所以，由辅助引理推得

$$\overline{W}(x+h, t) - \overline{W}(x, t) = O(h^{2\lambda'}\|\mu\|_{(0,\lambda)});$$

另一方面，由 (2.2) 及$\mu(0) = 0$可以看出，

$$\mu(t)[W_1(x+h, t) - W_1(x, t)] = O(h^{2\lambda'}\|\mu\|_{(0,\lambda)});$$

于是，我们证得：当$(x, t) \in S$时，

$$W(x+h, t) - W(x, t) = O(h^{2\lambda'}\|\mu\|_{(0,\lambda)}). \qquad (2.4)$$

函数

$$J(x, t) = W(x+h, t) - W(x, t)$$

在区域$\overline{D}$内满足齐次热传导方程，当$t = 0$时和在无穷远处取零值，而在曲线S上有估值 (2.4). 因此，根据极值原理的推论，(2.4) 在整个闭区域$\overline{D}$上成立.

II) 现在讨论$W[\mu]$关于t的光滑性. 设

$$I(x, t) = W(x+h, t+k) - W(x, t),$$

其中k和h是参数. 显然，对于任何h和k，$I(x, t)$是$\overline{D}$内的连续函数，它在D内满足齐次热传导方程，并在无穷远处取零值.

前面已经说明过，$W(x, 0) = 0$；同时，由于$\mu \in (0, \lambda)$，根据定理 2，

$$W(x, k) = O(k^{\lambda}\|\mu\|_{(0,\lambda)}),$$

因而

$$I(x, 0) = O(k^{\lambda}\|\mu\|_{(0,\lambda)}). \tag{2.5}$$

为估计 $I(x, t)$ 在 S 上的大小，假定参数 h 由等式

$$h = \psi(t + k) - \psi(t)$$

所确定. 这样，当 (x, t) 趋向曲线 S 上一点

$$(x_0, t_0) = (\psi(t_0), t_0)$$

时，$(x + h, t + k)$也趋向于 S 上一点

$$(x_0 + h, t_0 + k) = (\psi(t_0 + k), t_0 + k).$$

因此，根据跃度公式有

$$\begin{aligned} I(x_0, t_0) &= W_{st}(t_0 + k) - W_{st}(t_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\mu(t_0 + k) - \mu(t_0)\right] \\ &= O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}k^{\frac{1}{2}} + \|\mu\|_{(0,\lambda)}k^{\lambda}) \\ &= O(k^{\lambda}\|\mu\|_{(0,\lambda)}), \end{aligned} \tag{2.6}$$

这样，根据极值原理的推论，估值 (2.6) 在整个 $\overline{D}$ 内成立，即

$$W(x + h, t + k) - W(x, t) = O(k^{\lambda}\|\mu\|_{(0,\lambda)}). \tag{2.7}$$

因此，由 (2.4) 和 S 的可微性得到

$$\begin{aligned} W(x, t + k) - W(x, t) &= W(x + h, t + k) \\ &\quad - W(x,t) + W(x,t + k) - W(x + h,t + k) \\ &= O(k^{\lambda}\|\mu\|_{(0,\lambda)}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

估值 (2.4) 和 (2.8) 证明了定理 3.

定理 4 设曲线 S 属于 (1, 0) 类，密度 $\mu(t)$ 在 l 上属于 $(0, \lambda)$ 类，$\mu(0) = 0$，$0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$. 这时，单层热势 $V[\mu]$ 在 $\overline{D}$ 内属于 $B^{(1,2\lambda)}$ 类，而且，

$$\|V\|_{B^{(1,2\lambda)}} = O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}), \tag{2.9}$$

这里的O和μ无关,同时,$V(x, 0) = \partial V(x, 0)/\partial x = 0$.

证明:

显然,

$$\max_{(x,t)\in \bar{D}} \{|V(x, t)|\} = O(\max_{0\leqslant t\leqslant T} |\mu(t)|). \qquad (2.10)$$

从第二章微分公式 (1.5) 和本节定理 3 推出,$V(x,t)$ 在 $\bar{D}$ 内属于$(1, 0, 2\lambda', \lambda)$类,并且,由于 (2.10),

$$\|V\|_{(1,0,2\lambda',\lambda)} = O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}), \qquad (2.11)$$

为证明定理 4,讨论 $V(x, t)$ 对 t 的光滑性.

令 $V_1(x, t) = V[1]$ 是单位密度的单层热势. 这时

$$V(x, t) = \bar{V}(x, t) + \mu(t) V_1(x, t), \qquad (2.12)$$

$$\bar{V}(x, t) = \int_0^t [\mu(\tau) - \mu(t)] G(x, t; \phi(\tau), \tau) d\tau.$$

容易验证,由于 $\mu\in(0, \lambda)$, $\mu(0) = 0$, 从 (2.12) 可推得

$$V(x, t) = O(t^{\frac{1}{2}+\lambda}\|\mu\|_{(0,\lambda)}), \ t > 0. \qquad (2.13)$$

现设 (x, t_1)、(x, t_2) 为 $\bar{D}$ 内任意二点. 为方便计,令 $t_1 - t_2 = \varepsilon > 0$. 如果 $t_2 \leqslant \varepsilon$, 则 $t_1 \leqslant 2\varepsilon$, 此时由 (2.13) 得

$$V(x, t_1) - V(x, t_2) = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}+\lambda}\|\mu\|_{(0,\lambda)}).$$

现讨论 $t_2 \geqslant \varepsilon > 0$ 的情形. 我们写

$$V(x, t) = \tilde{V}(x, t) + \mu(t_2) V_1(x, t),$$

$$\tilde{V}(x, t) = \int_0^t [\mu(\tau) - \mu(t_2)] G(x, t; \phi(\tau), \tau) d\tau.$$

这样,

$$V(x, t_1) - V(x, t_2) = [\tilde{V}(x, t_1) - \tilde{V}(x, t_2)] + \\ + \mu(t_2)[V_1(x, t_1) - V_1(x, t_2)]. \qquad (2.14)$$

根据第二章微分公式 (1.6) 和定理 2,

$$\frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} = O(t^{-\frac{1}{2}}), \qquad t > 0.$$

因此，

$$\mu(t_2)[V_1(x,t_1)-V_1(x,t_2)]=O(\varepsilon^{\lambda+\frac{1}{2}}\|\mu\|_{(0,\lambda)})$$

最后，讨论 (2.14) 中第一个括号，把它写成四个积分的和:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{V}(x,t_1)-\widetilde{V}(x,t_2)\\
&=\int_{t_2-\varepsilon}^{t_1}[\mu(\tau)-\mu(t_2)]G(x,t_1;\phi(\tau),\tau)d\tau\\
&\quad-\int_{t_2-\varepsilon}^{t_2}[\mu(\tau)-\mu(t_2)]G(x,t_2;\phi(\tau),\tau)d\tau\\
&\quad+\int_0^{t_2-\varepsilon}\frac{\mu(\tau)-\mu(t_2)}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{\sqrt{t_1-\tau}}-\frac{1}{\sqrt{t_2-\tau}}\right]\times\\
&\quad\times e^{-\frac{[x-\phi(\tau)]^2}{4(t_1-\tau)}}d\tau+\int_0^{t_2-\varepsilon}\frac{\mu(\tau)-\mu(t_2)}{2\sqrt{\pi(t_2-\tau)}}\times\\
&\quad\times\left[e^{-\frac{[x-\phi(\tau)]^2}{4(t_2-\tau)}}-e^{-\frac{[x-\phi(\tau)]^2}{4(t_1-\tau)}}\right]d\tau;
\end{aligned}$$

它们均可估值为

$$O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}\varepsilon^{\frac{1}{2}+\lambda'}).$$

于是，我们证明了

$$V(x,t_1)-V(x,t_2)=O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}\varepsilon^{\lambda'+\frac{1}{2}}). \tag{2.15}$$

估值 (2.11) 和 (2.15) 证明了定理 4. 由微分公式 (1.5) 看出

$$\frac{\partial V(x,0)}{\partial x}=0.$$

3） 密度为 $C^{(0,\lambda)}$ 类函数 $\left(\frac{1}{2}<\lambda\leqslant 1\right)$ 的曲线热势

定理 5 设曲线 S 属于 $\left(1,\lambda-\frac{1}{2}\right)$ 类，$\frac{1}{2}<\lambda\leqslant 1$，密度 $\mu(t)$ 在 l 上属于 $(0,\lambda)$类，$\mu(0)=0$. 这时，双层热势 $W[\mu]$ 在 $\overline{D}$ 内属于 $B^{(1,2\lambda-1)}$ 类，而且，

$$\|W\|_{B^{(1,2\lambda-1)}} = O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}), \tag{2.16}$$

这里的O与密度μ无关,同时, $W(x,0) = \dfrac{\partial W(x,0)}{\partial x} = 0$.

证明:

由(2.3)及第二章(1.7)和(1.6)可得

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial \overline{W}(x,t)}{\partial x} - \mu(t) \times \times \left[W_{\psi'}(x,t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{[x-\psi(0)]^2}{4t}}\right], \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial \overline{W}(x,t)}{\partial x} = \int_0^t [\mu(\tau) - \mu(t)] \times \times \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial G(x,t;\psi(\tau),\tau)}{\partial \xi}\right] d\tau. \tag{2.18}$$

现在讨论$\partial W/\partial x$的光滑性.

由辅助引理推出,$\partial\overline{W}/\partial x$在$\overline{D}$内对$x$满足指数为$2\lambda''-1$的正则条件,并且,它的正则系数可用$\|\mu\|_{(0,\lambda)}$估值.

利用证明本节中(2.2)的方法可以证明, $\partial\overline{W}/\partial x$在$\overline{D}$内对$t$满足指数为$\lambda - \dfrac{1}{2}$的正则条件,同时,它的正则系数可以用$\|\mu\|_{(0,\lambda)}$估计.

这样,我们证明了: 在$\overline{D}$内,$\partial\overline{W}/\partial x$是$B^{(0,2\lambda-1)}$类函数,并且,

$$\left\|\frac{\partial \overline{W}}{\partial x}\right\|_{B^{(0,2\lambda-1)}} = O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}). \tag{2.19}$$

现在讨论(2.17)中第二项的光滑性.

根据定理3,热势$W_{\psi'}(x,t)$在$\overline{D}$内属于$B^{(0,2\lambda-1)}$类,同时,它在这类中的模可以用$\|\psi'\|_{(0,\lambda-\frac{1}{2})}$估计.因此,$\mu(t)W[\psi']$

在 $\overline{D}$ 内是 $B^{(0,2\lambda-1)}$ 类函数，而且，它的模可以用 $\|\mu\|_{(0,\lambda)}$ 来估计.

不难证明

$$F(x, t)=\frac{\mu(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{[x-\phi(0)]^2}{4t}}$$

在 $\overline{D}$ 内是 $B^{(0,2\lambda-1)}$ 类函数,同时,

$$\|F\|_{B^{(0,2\lambda-1)}}=O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}).$$

综上所述，$\partial W/\partial x$ 是 $\overline{D}$ 内的 $B^{(0,2\lambda-1)}$ 类函数,且

$$\left\|\frac{\partial W}{\partial x}\right\|_{B^{(0,2\lambda-1)}}=O(\|\mu\|_{(0,\lambda)});$$

也就是说，W 在 $\overline{D}$ 内是 $\left(1, 0, 2\lambda''-1, \lambda-\frac{1}{2}\right)$ 类函数和

$$\|W\|_{(1,0,2\lambda''-1,\lambda-\frac{1}{2})}=O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}). \tag{2.20}$$

W 对 t 的光滑性可用本节定理 3 中的方法进行研究，这里不重复了.

定理 6　设定理 5 的条件均成立. 这时，单层热势 $V[\mu]$ 在区域 $\overline{D}$ 内属于 $B^{(2,2\lambda-1)}$ 类，它在这个函数类中的模可用 $\|\mu\|_{(0,\lambda)}$ 估值,同时,

$$V(x, 0)=\frac{\partial V(x, 0)}{\partial x}=\frac{\partial^2 V(x, 0)}{\partial x^2}=\frac{\partial V(x, 0)}{\partial t}=0.$$

证明:

从第二章微分公式 (1.5) 和前一个定理推出，$V[\mu]$ 在 $\overline{D}$ 内属于 $\left(2, 0, 2\lambda''-1, \lambda-\frac{1}{2}\right)\cap(1, 0, 1, \lambda'')$ 类,并且,它在这个函数类中的模可以用 $\|\mu\|_{(0,\lambda)}$ 估计；另一方面，根据第二章微分公式 (1.7)，$\partial V[\mu]/\partial t=-\partial W[\mu]/\partial x$，所以，利用 (2.20) 可以完成本定理的证明.

§ 3 密度为可微正则连续函数的曲线热势

1) 密度为 $C^{(1,\lambda)}$ 类函数 $\left(0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}\right)$ 的曲线热势

使用微分公式及定理 3—5，可以证明

定理 7 假设密度 $\mu(t)$ 在区间 l 上属于 $(1, \lambda)$ 类，$0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$. 若 $S \in (1, \lambda)$，$\mu(0)=0$，则 $W[\mu] \in B^{(1,2\lambda)}(\overline{D})$，$V[\mu] \in B^{(2,2\lambda)}(\overline{D})$；若 $S \in \left(1, \lambda + \frac{1}{2}\right)$，$\mu(0) = \mu'(0)=0$，则 $W \in B^{(2,2\lambda)}(\overline{D})$，$V \in B^{(3,2\lambda)}(\overline{D})$，在各种情况下，在相应的函数类中，$W$ 和 V 的模可用其密度的模估计. 同时，W 和 V 以及它们所有的导数在 $t = 0$ 时取零值.

2) 密度为 $C^{(1,\lambda)}\left(\frac{1}{2} < \lambda \leqslant 1\right)$ 类函数的曲线热势

使用微分公式及定理 4—7，可以证明

定理 8 设 $\mu \in (1, \lambda)$，$\mu'(0) = \mu(0) = 0$，$\frac{1}{2} < \lambda \leqslant 1$. 若 $S \in (1, \lambda)$，则 $W \in B^{(2,2\lambda-1)}(\overline{D})$，$V \in B^{(3,2\lambda-1)}(\overline{D})$；若 $S \in \left(2, \lambda - \frac{1}{2}\right)$，则 $W \in B^{(3,2\lambda-1)}(\overline{D})$，$V \in B^{(4,2\lambda-1)}(\overline{D})$；这时，$W$ 和 V 在相应的函数类中的模均可用 $\|\mu\|_{(1,\lambda)}$ 估值，而且，W 和 V 及其所有导数在 $t = 0$ 时均取零值.

§ 4 基本定理

现在证明曲线热势的基本定理.

基本定理 设曲线热势的密度 $\mu(t)$ 属于 (n, λ) 类，$n \geqslant 1$，$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，并且，$\mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = \cdots = \mu^{(n)}(0) = 0$.

1) 若 $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$，$S \in (n, \lambda)$，则 $W[\mu] \in B^{(2n-1,2\lambda)}(\overline{D})$，

$V[\mu] \in B^{(2n,2\lambda)}(\overline{D})$;

2） 若 $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$, $S \in \left(n, \lambda + \frac{1}{2}\right)$, 则 $W \in B^{(2n,2\lambda)}(\overline{D})$, $V \in B^{(2n+1,2\lambda)}(\overline{D})$;

3） 若 $\frac{1}{2} < \lambda \leqslant 1$, $S \in (n, \lambda)$, 则 $W \in B^{(2n,2\lambda-1)}(\overline{D})$, $V \in B^{(2n+1,2\lambda-1)}(\overline{D})$;

4） 若 $\frac{1}{2} < \lambda \leqslant 1$, $S \in \left(n+1, \lambda - \frac{1}{2}\right)$, 则 $W \in B^{(2n+1,2\lambda-1)}(\overline{D})$, $V \in B^{(2n+2,2\lambda-1)}(\overline{D})$;

在所有的情况下，W 和 V 在相应的函数类中的模均可以用 $\|\mu\|_{(n,\lambda)}$ 估值；同时，W 和 V 及其所有导数在 $t = 0$ 时均取零值.

证明:

基本定理用归纳法证明.

根据本节定理 1— 定理 8 的结果，应用第二章诸微分公式，不难证明基本定理在 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时的正确性.

现假定 $n = k - 1$ 和 $n = k$ 时基本定理是正确的，而证明它在 $n = k + 1$ 时的正确性，$n \geqslant 2$. 为节省篇幅起见，只讨论 $W[\mu]$ 的光滑性.

令 $\mu \in (k+1, \lambda)$, $S \in (k+1, \lambda)$, $\mu(0) = \mu'(0) = \cdots = \mu^{(k+1)}(0) = 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$. 这时, $\mu' \in (k, \lambda)$, $\mu\psi' \in (k, \lambda)$. 因而，从第二章微分公式 (1.7) 及 (1.6) 和基本定理第二个论断在 $n = k$ 时的正确性推得

$$\frac{\partial W[\mu]}{\partial x} \in B^{(2k,2\lambda)};$$

又因 μ, $\psi \in (k+1, \lambda)$, 故 $\mu' \in (k, \lambda)$, $\mu(\psi')^2 \in (k, \lambda)$, $\mu'\psi' \in (k, \lambda)$, $\mu\psi'' \in (k-1, \lambda)$, 因而，从微分公式 (1.9) 以

及基本定理第二个论断在 $n=k-1$ 时的正确性及第一个论断在 $n=k$ 时的正确性推得

$$\frac{\partial W[\mu]}{\partial t}\in B^{(2k-1,2\lambda)}.$$

这样，根据 B 函数类的定义，$W\in B^{(2k+1,2\lambda)}$. 这就证明了基本定理第一个论断在 $n=k+1$ 时的正确性.

其次，令 $\mu\in(k+1,\lambda)$, $S\in\left(k+1,\lambda+\frac{1}{2}\right)$, $\mu(0)=\mu'(0)=\cdots=\mu^{(k+1)}(0)=0$, $0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$. 这时，$\mu'\in(k,\lambda)$, $\mu\psi'\in(k,\lambda+\frac{1}{2})$，因而，从第二章微分公式 (1.6) 及 (1.7) 和基本定理第二个论断及第四个论断在 $n=k$ 时的正确性推得

$$\frac{\partial W[\mu]}{\partial x}\in B^{(2k+1,2\lambda)};$$

又因 $\mu'\in(k,\lambda)$, $\mu(\psi')^2\in\left(k,\lambda+\frac{1}{2}\right)$, $\mu'\psi'\in(k,\lambda)$, $\mu\psi''\in\left(k+1,\lambda+\frac{1}{2}\right)$. 所以，根据微分公式 (1.8) 以及基本定理第二个论断在 $n=k$ 时的正确性及第四个论断在 $n=k-1$ 时的正确性推得

$$\frac{\partial W[\mu]}{\partial t}\in B^{(2k,2\lambda)},$$

所以，$W\in B^{(2k+2,2\lambda)}$，这就证明了基本定理第二个论断在 $n=k+1$ 时的正确性.

基本定理第三个论断可直接由第二个论断推出. 实际上，既然 $\mu\in(k,\lambda)$, $\frac{1}{2}<\lambda\leqslant 1$, 那么，$\mu\in(k,\lambda')$, $\lambda'=\lambda-\frac{1}{2}$，此时再应用第二个论断便可得到第三个论断.

为证明基本定理第四个论断在 $n=k+1$ 时的正确性，

我们假设 $\mu\in(k+1,\lambda)$, $S\in\left(k+2,\lambda-\frac{1}{2}\right)$, $\mu(0)=\mu'(0)=\cdots=\mu^{(k+1)}(0)$, $\frac{1}{2}<\lambda\leqslant 1$.这时, $\mu'\in(k,\lambda)$, $\mu\psi'\in\left(k+1,\lambda-\frac{1}{2}\right)$. 根据微分公式 (1.6), (1.7) 及基本定理第四个论断在 $n=k$ 时的正确性得到

$$\frac{\partial W[\mu]}{\partial x}\in B^{(2k+2,2\lambda-1)};$$

又因为 $\mu'\in(k,\lambda)$, $\mu(\psi')^2\in\left(k+1,\lambda-\frac{1}{2}\right)$, $\mu'\psi'\in(k,\lambda)$, $\mu\psi''\in\left(k,\lambda-\frac{1}{2}\right)$, 所以,由微分公式(1.9)及基本定理第三个论断在 $n=k$ 时的正确性及第四个论断在 $n=k-1$ 时的正确性得到

$$\frac{\partial W[\mu]}{\partial t}\in B^{(2k+1,2\lambda-1)}.$$

这样,根据 B 函数类的性质, $W\in B^{(2k+3,2\lambda-1)}$, 即基本定理第四个论断在 $n=k+1$ 时是正确的.

完全类似地讨论 V 的光滑性, W 和 V 在 B 函数类中的模的估值以及 W 和 V 各阶导数在 $t=0$ 时取零值的结论.这样,从 $n=k-1$ 和 $n=k$ 时基本定理的正确性出发,我们用归纳法证明了它在 $n=k+1$ 时的正确性.

推论: 以 S_δ^T 表示 S 的一部分 (S_δ^T: $x=\phi(t)$, $\delta\leqslant t\leqslant T$), 由 S_δ^T 和 $t=\delta$ 及 $t=T$ 所界的半无穷区域记为 D_δ^T. 从定理1—8 及基本定理的证明中不难看出,当上述各定理中要求密度及其相应阶导数在零点取零值的条件不成立,而成立其它所有条件时,这些定理在闭区域 $\overline{D}_\delta^T$ 内仍是正确的,这里的 $\delta>0$ 是任意的. 这时,所有相应的估值式只在区域 $\overline{D}_\delta^T$ 上成立,而且,这些估值式中右方的常数还依赖于 δ 的选择. 在这

种情况下，W 和 V 及其导数在 $t=0$ 时取零值的论断一般是不成立的。

把本节所有的结果综合起来，我们列表说明曲线热势的光滑性与其密度的光滑性及热势所分布的曲线的光滑性之间的关系。

当已知曲线 S 的光滑性及密度 $\mu(t)$ 在 $[0, T]$ 上的光滑性时，曲线热势 $W[\mu]$ 和 $V[\mu]$ 在区域 $\overline{D}_\delta^T$ 内的光滑性示于表1中，表1中的 $\delta>0$ 是任意的，并且，表中所有的 W 和 V 在相应的 B 函数类中的模可以用密度 μ 在相应的 C 函数类中的模来估值；如果 $\mu(0)=\mu'(0)=\cdots=\mu^{(n)}(0)=0$，则可取 $\delta=0, n\geqslant 0$。

表1　曲线热势的光滑性

$\mu(t)$		S	$W[\mu]$	$V[\mu]$
$(0, \lambda)$	$\lambda=0$	$(0, 0)$		$B^{(0,1)}$
	$0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$	$(1, 0)$	$B^{(0,2\lambda)}$	$B^{(1,2\lambda)}$
	$\frac{1}{2}<\lambda\leqslant 1$	$\left(1, \lambda-\frac{1}{2}\right)$	$B^{(1,2\lambda-1)}$	$B^{(2,2\lambda-1)}$
(n, λ) $n\geqslant 1$ $0\leqslant\lambda\leqslant 1$	$0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$	(n, λ)	$B^{(2n-1,2\lambda)}$	$B^{(2n,2\lambda)}$
		$\left(n, \lambda+\frac{1}{2}\right)$	$B^{(2n,2\lambda)}$	$B^{(2n+1,2\lambda)}$
	$\frac{1}{2}<\lambda\leqslant 1$	(n, λ)	$B^{(2n,2\lambda-1)}$	$B^{(2n+1,2\lambda-1)}$
		$\left(n+1, \lambda-\frac{1}{2}\right)$	$B^{(2n+1,2\lambda-1)}$	$B^{(2n+2,2\lambda-1)}$

注　曲线热势表示的是不同类型的热源的温度影响函数。为了使“势”(温度)能够足够光滑地变化，自然要求热源的工作方式(包括热源强度的变化方式和热源移动的方式)也“相应地”足够光滑地变化。曲线热势的基本定理，严格地刻

划了这种"相应的"关系.

基本定理中,要求在初始时刻热源强度取零值,也是很自然的. 事实上,既便 S 无限多次可微, μ 也无穷多次可微,只要 $\mu(0) \neq 0$, 基本定理就可能不成立.

例如,当取 t 轴为 S, 并令 $\mu \equiv 1$ 时,单位密度的双层热势 $W[1] = W_1(x, t)$ 在坐标原点处就不连续. 实际上,根据第二章第三节跃度公式(3.6),当 $t > 0$、$x = 0$ 时,

$$W[1] = \frac{1}{2},$$

因而,当 (x, t) 沿 t 轴趋近坐标原点时, $W_1(0, 0) = \frac{1}{2}$; 然而,当 $x \neq 0$, $t = 0$ 时,

$$W[1] = 0,$$

因而,当 (x, t) 沿 x 轴趋近坐标原点时, $W_1(0, 0) = 0$. 所以, $W_1(x, t)$ 在原点是间断的.

第三节　面热势的光滑性

§1　辅助引理

我们使用第一章第三节中的记号.

读者可自行验证下面的引理.

辅助引理　令 η 为常数,并

$$G_{\alpha\beta}(x, t; \xi, \tau) = \frac{(x-\xi)^\alpha}{(\cdot-\tau)^\beta} e^{-\frac{\eta^2(x-\xi)^2}{t-\tau}},$$

$$H_{\alpha\beta}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\phi_1(\tau)}^{\phi_2(\tau)} G_{\alpha\beta}(x, t; \xi, \tau) d\xi.$$

设 $\alpha \geqslant 0$ 为整数, $\beta \geqslant 0$. 当函数 $\phi_l(t)$ 在 $l = [0, T]$ 上连续时,若 $0 < \gamma = \alpha - 2\beta + 3 < 1$, 则对任意的 x_1、x_2 和 $t \geqslant 0$ 有

$$H_{\alpha\beta}(x_1,t)-H_{\alpha\beta}(x_2,t)=O(|x_1-x_2|^{\gamma});\qquad(3.1)$$

若 $\gamma=1$，则

$$H_{\alpha\beta}(x_1,t)-H_{\alpha\beta}(x_2,t)=O(|x_1-x_2|\ln|x_1-x_2|);\ (3.2)$$

若 $0<\gamma<2$，则对任意的 x 和 $t_1\geqslant 0$、$t_2\geqslant 0$ 有:

$$H_{\alpha\beta}(x,t_1)-H_{\alpha\beta}(x,t_2)=O(|t_1-t_2|^{\gamma/2});\qquad(3.3)$$

若 $\gamma=2$，则

$$H_{\alpha\beta}(x,t_1)-H_{\alpha\beta}(x,t_2)=O(|t_1-t_2|\ln|t_1-t_2|);\ (3.4)$$

(3.1)—(3.4) 中的 O 不依赖于 x, t; x_1, x_2; t_1, t_2 的位置.

由辅助引理立刻推得下面的定理.

定理 1 设函数 $\psi_i(t)$ 在 l 上连续 ($i=1,2$)，密度 $\rho(x,t)$ 在 $\bar{g}$ 内连续. 这时，面热势

$$U[\rho]=\int_0^t d\tau\int_{\psi_1(\tau)}^{\psi_2(\tau)}\rho(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi$$

在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(1,1)}$ 类，且

$$\|U\|_{B^{(1,1)}}=O(\rho_0=\max_{(x,t)\in\bar{g}}|\rho(x,t)|),\qquad(3.5)$$

其中 O 与 ρ 无关. 同时，当 $t=0$ 时，U 及其对 x 的导数取零值.

§2 密度为正则连续函数的面热势

定理 2 设 $S_i\in(1,0)$,$\rho\in B^{(0,\lambda)}(\bar{g})0<\lambda\leqslant 1$,$\rho(\psi_i(0),0)=$ $=0$, $i=1,2$. 这时，$U[\rho]\in B^{(2,\lambda)}(\bar{g})$，并且,

$$\|U\|_{B^{(2,\lambda)}}=O(\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}),\qquad(3.6)$$

这里的 O 与 ρ 无关. 同时，U 及其所有导数在 $(\psi_i(0),0)$ 点取零值，$i=1,2$.

证明:

这个定理的证明较长，我们分三部分叙述.

1) 首先证明 $U\in\left(2,0,\lambda',\dfrac{\lambda}{2}\right)$，这里，当 $\lambda<1$ 时，

$\lambda' = \lambda$; 当 $\lambda = 1$ 时, $\lambda' < 1$ 是任意的. 由第二章第二节公式 (2.3) 看出, 当 $(x, t) \in g$ 时,

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \rho(x, t) \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^*(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.7)$$

其中 $U_1(x, t) = U[1]$ 是单位密度的面热势, 而

$$\frac{\partial^2 U^*(x, t)}{\partial x^2} = \int_0^t d\tau \int_{\psi_1(\tau)}^{\psi_2(\tau)} [\rho(\xi, \tau) - \rho(x, t)] \times$$

$$\times \frac{\partial^2 G(x, t; \xi, \tau)}{\partial x^2} d\xi.$$

可以验证,

$$\left\|\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2}\right\|_{B^{(0,\lambda)}} = O(\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}).$$

由第二章微分公式 (1.10) 得到

$$\frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial x^2} = V^2[\psi_2'] - V^1[\psi_1'] +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\psi_1(0)}^{\psi_2(0)} \times e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi - 1,$$

其中 $V^i[\psi_i']$ 是分布在曲线 S_i 上的密度为 $\psi_i'(t)$ 的单层热势. 由前节定理 1 知, $V^i[\psi_i']$ 在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(0,\lambda)}$ 类, $i = 1, 2$. 这样,

$$\|\rho V^i\|_{B^{(0,\lambda)}} = O(\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}). \quad (3.8)$$

因此, 为证明 $U \in \left(2, 0, \lambda', \frac{\lambda}{2}\right)$, 只剩下讨论函数

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\psi_1(0)}^{\psi_2(0)} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\psi_2(0)-x}{2\sqrt{t}}} e^{-\zeta^2} d\zeta$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\psi_1(0)-x}{2\sqrt{t}}} e^{-\zeta^2} d\zeta. \quad (3.9)$$

2) 为简单计, 只讨论函数

$$\rho(x,t)F(x,t)=\rho(x,t)\int_0^{\frac{\psi_1(0)-x}{2\sqrt{t}}} e^{-\zeta^2}d\zeta \tag{3.10}$$

的光滑性.

不难验证,

$$F(x_1,t)-F(x_2,t)=O\left(\frac{|x_1-x_2|^\lambda}{|\psi_1(0)-x_2|^\lambda}\right), \tag{3.11}$$

这样,从(3.10)得到

$$\begin{aligned}\rho(x_1,t)F(x_1,t)-\rho(x_2,t)F(x_2,t)&=[\rho(x_1,t)\\ &-\rho(x_2,t)]F(x_1,t)+[\rho(x_2,t)-\rho(x_2,0)]\\ &\times[F(x_1,t)-F(x_2,t)]+\rho(x_2,0)[F(x_1,t)\\ &-F(x_2,t)]=O[|x_1-x_2|^\lambda\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}]+\rho(x_2,0)\\ &\times[F(x_1,t)-F(x_2,t)];\end{aligned}$$

另一方面,根据定理假设, $\rho(\psi_1(0),0)=0$, 所以,

$$\begin{aligned}&\rho(x_2,0)[F(x_1,t)-F(x_2,t)]\\ &=O(|x_1-x_2|^\lambda\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}).\end{aligned} \tag{3.12}$$

由于我们证明了 $\partial^2U/\partial x^2$ 是 $\bar{g}$ 内的正则连续函数,所以, $\partial^2U/\partial x^2$ 的计算公式(3.7)在整个闭区域 $\bar{g}$ 内成立. 又因 $\rho(\psi_i(0),0)=0$, 故 $\partial^2U/\partial x^2$在 $(\psi_i(0),0)$ 点取零值, $i=1,2$.

现在讨论 $\rho(x,t)F(x,t)$ 对 t 的光滑性.

设 $t_1-t_2=\varepsilon>0$, 这时,

$$\begin{aligned}\rho(x,t_1)F(x,t_1)-\rho(x,t_2)F(x,t_2)&=[\rho(x,t_1)\\ &-\rho(x,t_2)]F(x,t_1)+\rho(x,t_2)[F(x,t_1)\\ &-F(x,t_2)]=O(\varepsilon^{\frac{\lambda}{2}}\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}})+[\rho(x,t_2)\\ &-\rho(x,0)][F(x,t_1)-F(x,t_2)]+[\rho(x,0)\\ &-\rho(\psi_1(0),0)][F(x,t_1)-F(x,t_2)]\\ =O(\varepsilon^{\frac{\lambda}{2}}\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}})&+O[t_2^{\frac{\lambda}{2}}\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}|F(x,t_1)\end{aligned}$$

$$- F(x, t_2)|] + O[|x-\phi_1(0)|^2|F(x, t_1) - F(x, t_2)|]. \tag{3.13}$$

容易看出，

$$F(x, t_1) - F(x, t_2) = O(|F(x, t_1) - F(x, t_2)|^{\frac{\lambda}{2}}) = O(\varepsilon^{\frac{\lambda}{2}}|x-\phi_1(0)|^{-\lambda}), \tag{3.14}$$

同时，

$$F(x, t_1) - F(x, t_2) = O\left[\left(\frac{\varepsilon}{t_*}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\right], \ t_2 < t_* < t_1. \tag{3.15}$$

把(3.14)和(3.15)代入(3.13)，最后得到

$$\rho(x, t_1)F(x, t_1) - \rho(x, t_2)F(x, t_2) = O(\varepsilon^{\frac{\lambda}{2}}\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}).$$

于是，我们证明了：函数 $\rho(x,t)F(x,t)$ 在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(0,\lambda}$ 类，并且，它的模可以用 $\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}$ 估值。因此，考虑到第一段中的结果，我们看出：面热势 $U[\rho]$ 在 $\bar{g}$ 内属于 $\left(2, 0, \lambda', \dfrac{\lambda}{2}\right)$，同时，它在这个函数类中的模可以用 $\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}$ 估计。

另一方面，$U[\rho]$ 在 g 内满足非齐次热传导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = -\rho(x, t),$$

所以，面热势 U 在 $\bar{g}$ 内还属于 $\left(0, 1, \lambda', \dfrac{\lambda}{2}\right)$ 类，而且，它在这个函数类中的模可以用 $\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}$ 估计。同时显然，$\partial U/\partial t$ 在 $(\phi_i(0), 0)$ 点取零值，$i = 1, 2$。

3) 按照 $B^{(2,\lambda)}$ 类定义，为证明定理 2，只剩下讨论面热势 $U[\rho]$ 对 x 的导数关于 t 的光滑性。

设 (x, t_1)、(x, t_2) 是区域 $\bar{g}$ 内任意两点。这时，

$$\frac{\partial U[\rho]}{\partial x} = \int_0^t d\tau \int_{\phi_1(\tau)}^{\phi_2(\tau)} [\rho(\xi, \tau) - \rho(x, t_2)] \times \times \frac{\partial G(x, t; \xi, \tau)}{\partial x} d\xi + \rho(x, t_2) \times$$

$$\times \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial x} = K(x, t) + \rho(x, t_2) \times$$
$$\times \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial x},$$

其中 $U_1(x, t) = U[1]$ 是单位密度的面热势.

因为

$$\rho(\xi, \tau) - \rho(x, t_2) = O[\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}(|x-\xi|^\lambda + |t-\tau|^{\frac{\lambda}{2}} + |t-t_2|^{\frac{\lambda}{2}})],$$

所以,

$$K(x, t_1) - K(x, t_2) = O\left(\varepsilon^{\frac{1+\lambda}{2}}\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}\right). \quad (3.16)$$

现在讨论函数 $\rho(x, t_2)\partial U_1(x, t)/\partial x$ 对 t 的光滑性. 根据微分公式(1.10),

$$\frac{\partial U_1(x, t)}{\partial x} = V^1(x, t) - V^2(x, t),$$

这里的 V^i 是分布在曲线 S_i 上的单位密度的单层热势. 为简便计,只讨论函数

$$\rho(x, t_2)V^1(x, t)$$

对 t 的光滑性. 根据微分公式(1.6), 当 $t > 0$ 时,

$$\frac{\partial V^1(x, t)}{\partial t} = W[\psi_1'] + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{[x-\psi_1(0)]^2}{4t}} = O(1+t^{-\frac{1}{2}}), \quad (3.17)$$

其中 $W[\psi_1']$ 是密度为 $\psi_1'(t)$ 的双层热势, 它分布在曲线 S_1 上.

首先假定 $t_1 - t_2 = \varepsilon$, $t_2 \geqslant \varepsilon$. 这时,

$$\rho(x, t_2)[V^1(x, t_1) - V^1(x, t_2)] = [\rho(x, t_2) - \rho(x, 0)][V^1(x, t_1) - V^1(x, t_2)] + \rho(x, 0)[V^1(x, t_1) - V^1(x, t_2)].$$

由于拉格朗日公式和(3.17)，上式中头一项可估计为

$$O\left(\varepsilon^{\frac{1+\lambda}{2}}\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}\right).$$

第二项估计如下:

$$\begin{aligned}
&\rho(x,0)[V^1(x,t_1)-V^1(x,t_2)]=[\rho(x,0)\\
&\quad-\rho(\phi_1(0),0)][V^1(x,t_1)-V^1(x,t_2)]\\
&=O\left(\varepsilon\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}\left[1+\frac{|x-\phi_1(0)|^\lambda}{\sqrt{t^*}}e^{-\frac{[x-\phi_1(0)]^2}{4t^*}}\right]\right)\\
&=O\left(\varepsilon\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}\left[1+(t^*)^{\frac{\lambda-1}{2}}\right]\right)\\
&=O\left(\varepsilon^{\frac{1+\lambda}{2}}\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}\right),
\end{aligned}$$

其中 $t_2<t^*<t_1$.

最后讨论 $t_2\leqslant\varepsilon$ 的情形. 这时,

$$\begin{aligned}
&[\rho(x,t_2)-\rho(x,0)]V^1(x,t_i)\\
&\quad=O\left(\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}t_2^{\frac{\lambda}{2}}t_i^{\frac{1}{2}}\right)=O\left(\varepsilon^{\frac{1+\lambda}{2}}\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}\right),\quad i=1,2;
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&\rho(x,0)[V^1(x,t_1)-V^1(x,t_2)]=[\rho(x,0)\\
&\quad-\rho(\phi_1(0),0)][V^1(x,t_1)-V^1(x,t_2)]\\
&\quad=O[\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}|x-\phi_1(0)|^\lambda|V^1(x,t_1)\\
&\quad-V^1(x,t_2)|].
\end{aligned}\tag{3.18}$$

当 $|x-\phi_1(0)|\leqslant\sqrt{\varepsilon}$ 时,由于

$$V^1(x,t_i)=O(t_i^{\frac{1}{2}}),$$

所以,(3.18) 可估计为

$$O\left(\varepsilon^{\frac{1+\lambda}{2}}\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}\right);$$

当 $|x-\phi_1(0)|\geqslant\sqrt{\varepsilon}$ 时,根据(3.17),(3.18) 可估计为

$$O\left(\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}|x-\psi_1(0)|^{\lambda}\left[\varepsilon\left(1+\frac{1}{\sqrt{t^*}}e^{-\frac{[x-\psi_1(0)]^2}{4t^*}}\right)\right]\right)$$
$$=O(\varepsilon(1+|x-\psi_1(0)|^{\lambda-1})\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}})$$
$$=O\left(\varepsilon^{\frac{1+\lambda}{2}}\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}\right).$$

至此，我们证明了：面热势 U 是 $\bar{g}$ 内的 $\left(1,0,1,\frac{1+\lambda'}{2}\right)$ 类函数，同时，

$$\|U\|_{\left(1,0,1,\frac{1+\lambda'}{2}\right)}=O(\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}}).$$

定理 2 证毕.

推论 由定理 2 的证明过程中可见，如果条件

$$\rho(\psi_i(0),0)=0 \qquad (i=1,2)$$

不成立，而成立定理 2 的其它所有条件，那么，$U[\rho]$ 只在区域 $\bar{g}_\delta^T$ 内属于 $B^{(2,\lambda)}$ 类，且

$$\|U\|_{B^{(2,\lambda)}(\bar{g}_\delta^T)}=O(\|\rho\|_{B^{(0,\lambda)}(\bar{g})}),$$

这里 $\bar{g}_\delta^T$ 是 $\bar{g}$ 被直线 $t=\delta>0$ 所截的上部分，上面的估值式中的 O 依赖于 δ 的选择.

我们对定理 2 中的条件

$$\rho(\psi_i(0),0)=0 \qquad (i=1,2)$$

做一简要的分析. 我们举例说明，如果这个条件不成立，即便 $\rho(x,t)$ 在 $\bar{g}$ 内无限多次可微，$\psi_i(t)$ 也无限多次可微，仍然不能保证 $U[\rho]$ 在闭区域 $\bar{g}$ 内是 $B^{(2,\lambda)}$ 类函数.

事实上，设 S_i 为直线，S_1 为 t 轴的一部分，$\rho\equiv1$. 在第二章第二节第 1 段曾指出

$$\frac{\partial^2U_1(x,t)}{\partial x^2}=W_2[1]-W_1[1],$$

这里 $W_i[1]$ 表示分布在 S_i 上的单位密度的双层热势. 显然，热势 $W_2[1]$ 在坐标原点是连续的；而 $W_1[1]$ 在 $(0,0)$ 处是间

断的. 所以，$\dfrac{\partial^2 U[1]}{\partial x^2}$ 在 $\bar{g}$ 内不可能是 $B^{(0,\lambda)}$ 类函数.

§3 密度为 $B^{(m,\lambda)}$ ($1\leqslant m\leqslant 2,\ 0<\lambda\leqslant 1$) 类函数的面热势

根据微分公式、基本公式以及本节定理 1—2 和上节定理 6—7, 可以证明:

定理 3 设密度 $\rho(x,t)\in B^{(m,\lambda)}(\bar{g})$ 类，$m=1,\ 2, 0<\lambda\leqslant 1$, 并且，$\rho(x,t)$ 和它的所有导数在 $(\psi_i(0),0)$ 点取零值，$i=1,2$; 当 $m=1$ 时，设 $S_i\in\left(1,\dfrac{\lambda}{2}\right)$; 当 $m=2$ 时，设 $S_i\in\left(1,\dfrac{1+\lambda}{2}\right)$, $i=1,2$.

这时，面热势 $U[\rho]$ 在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(m+2,\lambda)}$ 类，并且，U 的模可用其密度的模估计；同时，U 及其所有导数在 $(\psi_i(0),0)$ 点取零值，$i=1,2$.

如果 ρ 及其导数在 $(\psi_i(0),0)$ 处不全为零，则上述结果只在区域 g_δ^T 内成立.

§4 基本定理

现在证明面热势的基本定理.

基本定理 设密度 $\rho(x,t)$ 在区域 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(m,\lambda)}$ 类，$m\geqslant 1,\ 0<\lambda\leqslant 1$, ρ 及其所有的导数在 $(\psi_i(0),0)$ 点取零值，$i=1,2$. 这时，若当 m 为偶数时，$S_i\in\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{1+\lambda}{2}\right)$ 类，当 m 为奇数时，$S_i\in\left(\dfrac{m+1}{2},\dfrac{\lambda}{2}\right)$ 类，则面热势 $U[\rho]$ 在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(m+2,\lambda)}$ 类，且

$$\|U\|_{B^{(m+2,\lambda)}(\bar{g})}=O(\|\rho\|_{B^{(m,\lambda)}(\bar{g})}), \tag{3.19}$$

这里的 O 与 ρ 无关；同时，U 及其所有的导数在 $(\psi_i(0),0)$ 点

取零值，$i=1,2$.

如果 $\rho(x,t)$ 及其所有导数在 $(\psi_i(0),0)$ 点不全为零，则 (3.19) 只在区域 g_δ^T 内成立，这时，(3.19) 右端的 O 依赖于 $\delta>0$ 的选择，并且，U 及其导数在 $(\psi_i(0),0)$ 点不一定为零.

证明:

基本定理用归纳法证明.

根据本节定理 3 知，基本定理在 $m=1$ 和 $m=2$ 时是正确的.

现设基本定理当 $m=n$ 时是正确的，$n\geqslant 1$，我们证明它在 $m=n+1$ 时的正确性.

为书写简便起见，不妨假设 n 为奇数，$n=2k+1$，$k\geqslant 0$，并只讨论 $U[\rho]$ 的光滑性.

设 $\rho\in B^{(2k+2,\lambda)}$，$S_i\in\left(k+1,\dfrac{1+\lambda}{2}\right)$，$i=1,2$. 这时，由基本定理在 $m=n=2k+1$ 时的正确性推得

$$U[\rho'_x]\in B^{(2k+3,\lambda)}(g);$$

同时，由于 $\rho(\psi_i(t),t)\in\left(k+1,\dfrac{\lambda}{2}\right)$ 类，所以，依前节基本定理，单层热势 $V^i[\rho(\psi_i(t),t)]$ 在 g 内属于 $B^{(2k+3,\lambda)}$ 类. 这样，由微分公式 (1.9) 可以看出

$$\begin{aligned}U\in&\left(2k+4,0,\lambda',\frac{\lambda}{2}\right)\cap\left(2k+3,0,1,\frac{1+\lambda'}{2}\right)\cap\\&\cap\left(2k+2,1,\lambda',\frac{\lambda}{2}\right)\cap\cdots\cdots\cap\\&\left(2,k+1,\lambda',\frac{\lambda}{2}\right)\cap\left(1,k+1,1,\frac{1+\lambda'}{2}\right);\end{aligned}$$

同时，由第二章基本公式 (2.8) 还可以看出: 既然 $U\in\left(2,k+1,\lambda',\dfrac{\lambda}{2}\right)$ 和 $\rho\in\left(0,k+1,\lambda',\dfrac{\lambda}{2}\right)$，那么，$\partial U/\partial t\in$

$\left(0, k+1, \lambda', \frac{\lambda}{2}\right)$，即 $U \in \left(0, k+2, \lambda', \frac{\lambda}{2}\right)$. 因此，根据 B 函数类定义，

$$U \in B^{(2k+4,\lambda)}(\bar{g}),$$

即基本定理当 $m = n + 1 = 2k + 2$ 时是正确的.

应当指出，由于证明中应用了前节基本定理，所以，本节基本定理中对 S_i 的光滑性的要求因 m 的奇偶性而异.

把本节中所有的结果概括起来，我们列表说明面热势 $U[\rho]$ 在区域 $\bar{g}_\delta^T$ 内的光滑性与其密度 ρ 在 $\bar{g}$ 内的光滑性以及曲线 S_i 的光滑性之间的关系. 表中 $U[\rho]$ 在 $B^{(m+2,\lambda)}(\bar{g}_\delta^T)$ 中的模可用 $\|\rho\|_{B^{(m,\lambda)}(\bar{g})}$ 估计；当 $\rho \in B^{(0,0)}$ 时，可取 $\delta = 0$；当 $\rho \in B^{(m,\lambda)}$，$m \geqslant 0$ 时，如果 ρ 及其所有导数在 $(\psi_i(0), 0)$ $(i = 1, 2)$ 点取零值，则也可取 $\delta = 0$.

表 2　面热势的光滑性

$\rho(x,t)$	S_i　$i = 1, 2$	$U[\rho]$
$B^{(0,0)}$	$(0, 0)$	$B^{(1,1)}$
$B^{(0,\lambda)}$	$(1, 0)$	$B^{(2,\lambda)}$
$B^{(m,\lambda)}$ $m \geqslant 1$ $0 < \lambda \leqslant 1$	m 为偶数 $\left(\frac{m}{2}, \frac{1+\lambda}{2}\right)$ m 为奇数 $\left(\frac{m+1}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$	$B^{(m+2,\lambda)}$

第四节　泊阿松积分的光滑性

由于今后的需要，本节内，我们只在某特定情况下讨论泊阿松积分的光滑性.

假定 $\varphi(x)$ 定义在全实数轴上，而当 $|x| \geq l$ 时，$\varphi(x)$ 及其所有的导数均恒为零。用 $\overline{D}$ 表示矩形区域 $-l \leqslant x \leqslant l$，$0 \leqslant t \leqslant T$。我们将在 $\overline{D}$ 内讨论泊阿松积分

$$Z(x, t) = Z(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi)\varphi(\xi)d\xi$$

$$= \int_{-L}^{L} G(x, t; \xi)\varphi(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)d\xi.$$

在第三章第二节中已证明，当 $\varphi(x)$ 连续时，在 D 内 $Z(x, t)$ 满足齐次热传导方程，$Z \in B^{(0,0)}(\overline{D})$，且 $Z(x, 0) = \varphi(x)$。

现设 $\varphi \in (0, \lambda)$，$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$。这时，用变换 $\xi - x = \eta$ 把 $Z(x, t)$ 写为

$$Z(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4t}}\varphi(x+\eta)d\eta,$$

因而，若 x_1，x_2 为任意两点，则

$$Z(x_1, t) - Z(x_2, t) = O(|x_1 - x_2|^{\lambda}\|\varphi\|_{(0,\lambda)}). \qquad (4.1)$$

现讨论 $Z(x, t)$ 关于 t 的光滑性。

不妨设 $t_1 - t_2 = \varepsilon > 0$。若 $t_2 \leqslant \varepsilon$，则有

$$Z(x, t_1) - Z(x, t_2) = Z(x, t_1) - Z(x, 0) + Z(x, 0) - Z(x, t_2),$$

而根据第三章第二节中的讨论可得

$$Z(x, t_i) - Z(x, 0) = Z(x, t_i) - \varphi(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t_i}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t_i}}[\varphi(\xi) - \varphi(x)]d\xi,$$

做变换

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{t_i}} = \eta$$

后有

$$Z(x,t_i)-Z(x,0)=O\left((\sqrt{t_i})^{\lambda}\|\varphi\|_{(0,\lambda)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}|\eta|^{\lambda}d\eta\right)$$

$$=O(\|\varphi\|_{(0,\lambda)}\varepsilon^{\frac{\lambda}{2}});\tag{4.2}$$

如果 $t_2\geqslant\varepsilon$，则有

$$Z(x,t_1)-Z(x,t_2)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}[\varphi(2\sqrt{t_1}\eta+x)$$

$$-\varphi(2\sqrt{t_2}\eta+x)]d\eta=O(\varepsilon^{\frac{\lambda}{2}}\|\varphi\|_{(0,\lambda)}).\tag{4.3}$$

从(4.1)，(4.2)及(4.3)我们可以得出结论：$Z\in B^{(0,\lambda)}(\overline{D})$，且

$$\|Z\|B^{(0,\lambda)}=O(\|\varphi\|_{(0,\lambda)}).\tag{4.4}$$

现在讨论一般情形．假定 $\varphi\in(n,\lambda)$，$n\geqslant0,0\leqslant\lambda\leqslant1$．

用变换 $\xi-x=\eta$ 把 $Z(x,t)$ 写为

$$Z(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\eta^2}{4t}}\varphi(x+\eta)d\eta.$$

由此可见，

$$\frac{\partial^{(n)}Z(\varphi)}{\partial x^n}=Z(\varphi^{(n)}),$$

$\varphi^{(n)}$ 表示 φ 的 n 阶导数． 根据前面的讨论，$\varphi\in(n,\lambda)$ 时，$Z(\varphi^{(n)})$ 属 $B^{(0,\lambda)}$ 类，因而，Z 在 $\overline{D}$ 内属于 $\left(n,0,\lambda,\frac{\lambda}{2}\right)$ 类，且其模可用 $\|\varphi\|_{(n,\lambda)}$ 估值．根据本章第一节中对 $B^{(n,\lambda)}$ 的合理性讨论，由于 Z 在 D 内满足齐次热传导方程，因此，如果 Z 在 $\overline{D}$ 内又属于 $\left(n-1,0,1,\frac{1+\lambda}{2}\right)$ 类，那么，它必然属于 $B^{(n,\lambda)}$ 类．我们现在证明这个事实．为此，只需讨论 $\partial^{(n-1)}Z(\varphi)/\partial x^{n-1}$ 对 t 的光滑性；可是，

$$\frac{\partial^{(n-1)}Z(\varphi)}{\partial x^{n-1}}=Z(\varphi^{(n-1)}),$$

所以，我们只需证明下述论断：若 $\varphi\in(1,\lambda)$，且当 $|x|\geqslant L$ 时，$\varphi(x)\equiv\varphi'(x)\equiv 0$，则 $Z(x,t)$ 在 $\overline{D}$ 内关于 t 属于 $\left(0,\frac{1+\lambda}{2}\right)$ 类，且它在这个函数类中的模可用 $\|\varphi\|_{(1,\lambda)}$ 估值。

为此，用变换 $\xi=\eta-L$ 把 $Z(x,t)$ 写为

$$Z(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+L-\eta)^2}{4t}}\varphi(\eta-L)d\eta.$$

引入新函数 $\theta(\eta)=\varphi(\eta-L)$，则 $\theta(\eta)$ 仍为 $(1,\lambda)$ 类函数，且 $\theta(0)=\theta'(0)=0$。这时，

$$\theta(\eta)=O(\eta^{1+\lambda}\|\varphi\|_{(1,\lambda)}).$$

显然，

$$Z(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+L-\eta)^2}{4t}}\theta(\eta)d\eta.$$

现设 $t_1\geqslant 0$，$t_2\geqslant 0$ 为 $[0,T]$ 内任意两点，$t_1-t_2=\varepsilon>0$。

当 $t_2\leqslant\varepsilon$ 时，利用变换 $\eta=2\sqrt{t_i}\zeta$ 有

$$Z(x,t_i)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t_i}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+L-\eta)^2}{4t_i}}\theta(\eta)d\eta$$
$$=O\left(\varepsilon^{\frac{1+\lambda}{2}}\|\varphi\|_{(1,\lambda)}\right).$$

其次，讨论 $t_2\geqslant\varepsilon$ 的情形。这时，

$$Z(x,t_1)-Z(x,t_2)=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t_1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{[x+L-\eta]^2}{4t_1}}-e^{-\frac{(x+L-\eta)^2}{4t_2}}\right]\theta(\eta)d\eta+$$
$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t_1}}-\frac{1}{2\sqrt{\pi t_2}}\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+L-\eta)^2}{4t_2}}\theta(\eta)d\eta;$$

第二个积分可估值为

$$O\left(\varepsilon t_2^{-\frac{3}{2}}\|\theta\|_{(1,\lambda)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+L-\eta)^2}{4t_1}}|\eta|^{1+\lambda}d\eta\right)$$

$$=O\left(\varepsilon^{\frac{1+\lambda}{2}}\|\varphi\|_{(1,\lambda)}\right);$$

由于当 $x\geqslant 0$ 时，

$$e^{-x}=O\left(x^{-1}e^{-\frac{x}{2}}\right),$$

所以，第一个积分可估值为

$$O\left(\varepsilon t_2^{-\frac{5}{2}}\|\theta\|_{(1,\lambda)}\int_{-\infty}^{\infty}(x+L-\eta)^2|\eta|^{1+\lambda}e^{-\frac{(x+L-\eta)^2}{4t_1}}d\eta\right)$$

$$=O\left(\varepsilon^{\frac{1+\lambda}{2}}\|\varphi\|_{(1,\lambda)}\right).$$

综合本节中的讨论，写成下面的定理.

定理 设始值函数 $\varphi(x)$ 及其所有导数在 $|x|\geqslant L$ 时均恒为零. 若 $\varphi\in(n,\lambda)$ 类，$n\geqslant 0$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，则哥西问题

$$\begin{cases}u_{xx}=u_t, & -\infty<x<\infty,\ 0<t<T;\\ u(x,0)=\varphi(x), & -\infty<x<\infty;\end{cases}$$

的解

$$Z(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)d\xi$$

在 $\overline{D}(-L\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant t\leqslant T)$ 内属于 $B^{(n,\lambda)}$ 类，且

$$\|Z\|_{B^{(n,\lambda)}}=O(\|\varphi\|_{(n,\lambda)}). \tag{4.5}$$

第六章　热势直接值的增滑作用

第一节　曲线热势直接值的增滑作用

§1　密度为连续函数的热势的直接值

定理 1　设曲线 $S\in(0,\lambda)$ 类，$3/4<\lambda\leqslant 1$，密度 $\mu(t)$ 连续.这时，$W_{st}(0)=V_{xst}(0)=0$，且 $W_{st}(t)$ 和 $V_{xst}(t)$ 在 $[0,T]$ 上属于 $(0,2\lambda-3/2)$ 类，同时，

$$\|W_{st}\|_{(0,2\lambda-3/2)}=O(\mu_0=\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\mu(t)|),\qquad(1.1)$$

$$\|V_{xst}\|_{(0,2\lambda-3/2)}=O(\mu_0),\qquad(1.2)$$

其中 O 与 μ 无关.

证明:

不妨只证明 (1.1). 根据定义，

$$W_{st}(t)=\int_0^t\mu(\tau)K(t,\tau)d\tau,$$

其中

$$K(t,\tau)=\frac{\phi(t)-\phi(\tau)}{4\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}e^{-\frac{[\phi(t)-\phi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}}.\qquad(1.3)$$

为计算方便，不妨设 $\Delta t\geqslant 0$. 当 $t\leqslant\Delta t$ 时，

$$W_{st}(t)=O\left(\mu_0\int_0^t(t-\tau)^{\lambda-\frac{3}{2}}d\tau\right)=O(\mu_0\Delta t^{\lambda-\frac{1}{2}});$$

$$W_{st}(t+\Delta t)=O(\mu_0\Delta t^{\lambda-\frac{1}{2}});\qquad(1.4)$$

现在讨论 $t\geqslant\Delta t$ 的情形. 估计差

$$W_{st}(t+\Delta t)-W_{st}(t)=\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}\mu(\tau)K(t+\Delta t,\tau)d\tau-$$

$$-\int_{t-\Delta t}^{t} \mu(\tau)K(t, \tau)d\tau + \int_0^{t-\Delta t} \mu(\tau) \times$$

$$[K(t+\Delta t, \tau)-K(t, \tau)]d\tau = Q_1+Q_2+Q_3, \quad (1.5)$$

把以上三个积分依次记为 Q_1, Q_2, Q_3.

由于 $S\in(0, \lambda)$, 所以,

$$Q_1 = O(\mu_0\Delta t^{\lambda-\frac{1}{2}}); \quad (1.6)$$

$$Q_2 = O(\mu_0\Delta t^{\lambda-\frac{1}{2}}). \quad (1.7)$$

把 Q_3 写成三项之和:

$$Q_3 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{t-\Delta t} \mu(\tau)[\psi(t+\Delta t)-\psi(\tau)]$$

$$\times \left[\frac{1}{(t+\Delta t-\tau)^{3/2}} - \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}\right] e^{-\frac{[\psi(t+\Delta t)-\psi(\tau)]^2}{4(t+\Delta t-\tau)}} d\tau$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{t-\Delta t} \mu(\tau) \frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{(t-\tau)^{3/2}}$$

$$\times e^{-\frac{[\psi(t+\Delta t)-\psi(\tau)]^2}{4(t+\Delta t-\tau)}} d\tau + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{t-\Delta t} \frac{\mu(\tau)[\psi(t)-\psi(\tau)]}{(t-\tau)^{3/2}}$$

$$\times \left\{e^{-\frac{[\psi(t+\Delta t)-\psi(\tau)]^2}{4(t+\Delta t-\tau)}} - e^{-\frac{[\psi(t)-\psi(\tau)]^2}{4t(-\tau)}}\right\} d\tau$$

$$= Q_3' + Q_3'' + Q_3''',$$

$$Q_3' = O\left(\mu_0\Delta t\left|\int_0^{t-\Delta t} (t-\tau)^{\lambda-\frac{3}{2}}d\tau\right|\right)$$

$$+ O\left(\mu_0\Delta t^{1+\lambda}\left|\int_0^{t-\Delta t} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}}d\tau\right|\right)$$

$$= O(\mu_0\Delta t^{\lambda-\frac{1}{2}}). \quad (1.8)$$

$$Q_3'' = O(\mu_0\Delta t^{\lambda-\frac{1}{2}}). \quad (1.9)$$

注意到当 x、$x' \geqslant 0$ 时,

$$e^{-x} - e^{-x'} = O(|x-x'|),$$

$$Q_3''' = O(\mu_0[\Delta t^{3\lambda-\frac{3}{2}} + \Delta t^{2\lambda-\frac{3}{2}}]) = O(\mu_0\Delta t^{2\lambda-\frac{3}{2}}). \quad (1.10)$$

估值 (1.4)、(1.6)—(1.10) 说明 $W_{st}(t)$ 在 $[0, T]$ 内满

足指数为 $2\lambda - 3/2$ 的正则条件，且其正则系数可用 μ_0 估值。

由于 $S\in(0,\lambda)$，$\lambda > 3/4$，所以，

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}|W_{st}(t)| = O(\mu_0).$$

因此，定理 1 证完.

§2 密度为正则连续函数的热势的直接值

定理 2 设密度 $\mu(t)$ 在 $[0, T]$ 上属于 $(0, \lambda)$ 类，$0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$，$\mu(0)=0$，$S\in(1,\lambda)$. 这时，$W_{st}(0)=V_{xst}(0)=0$，且 $W_{st}(t)$ 和 $V_{xst}(t)$ 在 $[0, T]$ 上属于 $\left(0, \lambda'+\frac{1}{2}\right)$ 类，同时，

$$\|W_{st}\|_{(0,\lambda'+\frac{1}{2})} = O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}), \tag{1.11}$$

$$\|V_{xst}\|_{(0,\lambda'+\frac{1}{2})} = O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}), \tag{1.11'}$$

这里，当 $0\leqslant\lambda<\frac{1}{2}$ 时，$\lambda'=\lambda$；当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\lambda'<\frac{1}{2}$ 是任意的. (1.11) 和 (1.11′)中的 O 与 μ 无关，但当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，与 λ' 的选择有关.

证明:

只证明 (1.11).

由于 $\psi(t)$ 可微，对 (1.3) 成立估值

$$K(t,\tau) = O(|t-\tau|^{-\frac{1}{2}}), \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial t} = O(|t-\tau|^{-\frac{3}{2}}). \tag{1.13}$$

现设 t_1，t_2 是 $[0, T]$ 内任意两点. 为方便计，令 $t_1 - t_2 = \varepsilon > 0$. 如果 $t_2\leqslant\varepsilon$，则由 (1.12) 和 $\mu(0)=0$ 得出:

$$W_{st}(t_1) = O(\varepsilon^{\lambda+\frac{1}{2}}\|\mu\|_{(0,\lambda)}). \tag{1.14}$$

现设 $t_2\geqslant\varepsilon$. 把差 $W_{st}(t_1) - W_{st}(t_2)$ 写为

$$
\begin{aligned}
W_{st}(t_1) - W_{st}(t_2) = \mu(t_2) & \left[\int_0^{t_1} K(t_1, \tau) d\tau \right.\\
& \left. - \int_0^{t_2} K(t_2, \tau) d\tau \right] + \left\{\int_0^{t_1} [\mu(\tau) \right.\\
& - \mu(t_2)] K(t_1, \tau) d\tau - \int_0^{t_2} [\mu(\tau) - \mu(t_2)]\\
& \left. \times K(t_2, \tau) d\tau \right\}. \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

先估计花括号内的差式. 由 (1.12) 得到

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1-2\varepsilon}^{t_1} & [\mu(\tau) - \mu(t_2)] K(t_1, \tau) d\tau \\
& = O(\varepsilon^{\lambda+\frac{1}{2}} \|\mu\|_{(0,\lambda)}), \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\int_{t_2-\varepsilon}^{t_2} [\mu(\tau) - \mu(t_2)] K(t_2, \tau) d\tau = O(\varepsilon^{\lambda+\frac{1}{2}} \|\mu\|_{(0,\lambda)}); \qquad (1.17)
$$

由 (1.13) 推得

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_2-\varepsilon} & [\mu(\tau) - \mu(t_2)][K(t_1, \tau) - K(t_2, \tau)] d\tau \\
& = \begin{cases} O(\varepsilon^{\lambda+\frac{1}{2}} \|\mu\|_{(0,\lambda)}), & 0 \leqslant \lambda < \dfrac{1}{2}, \\ O(\varepsilon^{\lambda'+\frac{1}{2}} \|\mu\|_{(0,\lambda)}), & \lambda = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

现在估计 (1.15) 中头一个差式. 为此, 进一步讨论核 $K(t,\tau)$. 在做变换

$$
\zeta = \frac{\phi(t) - \phi(\tau)}{2\sqrt{t - \tau}}
$$

后有

$$
\begin{aligned}
\int_0^t K(t, \tau) d\tau &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\phi(t)-\phi(0)}{2\sqrt{t}}} e^{-\zeta^2} d\zeta + V_{st}[\phi'] \\
&= f(t) + V_{st}[\phi'],
\end{aligned}
$$

其中 $V_{st}[\phi']$ 表示密度为 ϕ' 的单层热势的直接值.

显然，当 $S\in(1,0)$ 时，

$$f'(t)=O(t^{-\frac{1}{2}}),\qquad t>0;$$

因此，

$$\mu(t_2)[f(t_1)-f(t_2)]=O(\varepsilon^{\lambda+\frac{1}{2}}\|\mu\|_{(0,\lambda)}).\qquad(1.19)$$

现讨论差

$$\mu(t_2)[V_{st}^{\psi'}(t_1)-V_{st}^{\psi'}(t_2)],\qquad t_2\geqslant\varepsilon>0.$$

把 $V_{st}^{\psi'}(t)$ 写成

$$V_{st}^{\psi'}(t)=\bar V(t)+\psi'(t_2)V_{1st}(t),$$

$$\bar V(t)=\int_0^t\frac{\psi'(\tau)-\psi'(t_2)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{[\psi(t)-\psi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}}d\tau,$$

$$V_{1st}(t)=\int_0^t\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{[\psi(t)-\psi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}}d\tau.$$

显然，

$$V_{1st}'(t)=O(t^{-\frac{1}{2}}+1),\qquad t>0.$$

所以，

$$\mu(t_2)\psi'(t_2)[V_{1st}(t_1)-V_{1st}(t_2)]=O(\varepsilon^{\frac{1}{2}+\lambda}\|\mu\|_{(0,\lambda)}).\qquad(1.20)$$

最后，只剩下估计：$\bar V(t_1)-\bar V(t_2)$

$$=\int_{t_1-2\varepsilon}^{t_1}[\psi'(\tau)-\psi'(t_2)]G(\psi(t_1),t_1;\psi(\tau),\tau)d\tau$$

$$-\int_{t_2-\varepsilon}^{t_2}[\psi'(\tau)-\psi'(t_2)]G(\psi(t_2),t_2;$$

$$\psi(\tau),\tau)d\tau+\int_0^{t_2-\varepsilon}[\psi'(\tau)-\psi'(t_2)]\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi(t_1-\tau)}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\sqrt{\pi(t_2-\tau)}}\right]e^{-\frac{[\psi(t_1)-\psi(\tau)]^2}{4(t_1-\tau)}}d\tau+\int_0^{t_2-\varepsilon}[\psi'(\tau)$$

$$-\psi'(t_2)]\frac{1}{2\sqrt{\pi(t_2-\tau)}}\left[e^{-\frac{[\psi(t_1)-\psi(\tau)]^2}{4(t_1-\tau)}}-e^{-\frac{[\psi(t_2)-\psi(\tau)]^2}{4(t_2-\tau)}}\right]d\tau$$

$$=O(\varepsilon^{\lambda'+\frac{1}{2}}\|\psi'\|_{(0,\lambda)});$$

所以,

$$\mu(t_2)[\bar{V}(t_1)-\bar{V}(t_2)]=O(\varepsilon^{\lambda'+\frac{1}{2}}\|\mu\|_{(0,\lambda)}). \quad (1.21)$$

估值(1.14)—(1.21)证明了定理2.

定理3 设$\mu\in(0,\lambda)$, $\mu(0)=0$, $\frac{1}{2}<\lambda\leqslant 1$, $S\in(1,\lambda)$, 则$W_{st}(t)$和$V_{xst}(t)$在$[0,T]$上属于$\left(1,\lambda-\frac{1}{2}\right)$, 且

$$\|W_{st}\|_{(1,\lambda-\frac{1}{2})}=O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}), \quad (1.22)$$

$$\|V_{xst}\|_{(1,\lambda-\frac{1}{2})}=O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}); \quad (1.23)$$

同时,

$$W_{st}(0)=W'_{st}(0)=0, \qquad V_{xst}(0)=V'_{xst}(0)=0.$$

证明:

只证明(1.22).

1) 首先计算$W_{st}(t)$在$t=t_{0>0}$点的导数.

$$W_{st}(t)=\mu(t_0)\int_0^t K(t,\tau)d\tau+\int_0^t[\mu(\tau)-\mu(t_0)]K(t,\tau)d\tau=I_1(t)+I_2(t);$$

由于$\lambda>\frac{1}{2}$和

$$\frac{\partial K(t,t-h)}{\partial t}=O(h^{\lambda-\frac{3}{2}}),$$

$I_1(t)$的导数可写为

$$\frac{dI_1(t)}{dt}=\mu(t)[K(t,0)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}K(t,t-h)dh].$$

容易验证,

$$\frac{dI_2(t_0)}{dt}=\int_0^{t_0}[\mu(\tau)-\mu(t_0)]\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial t}\bigg|_{t=t_0}d\tau. \quad (1.24)$$

因此,

$$\frac{dW_{st}(t)}{dt}=\mu(t)\left[K(t,0)+\int_0^t\frac{\partial K(t,t-h)}{\partial t}dh\right]$$

$$+\int_0^t [\mu(\tau)-\mu(t)]\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial t}d\tau = J_1(t)+J_2(t). \tag{1.25}$$

显然,

$$\frac{dW_{st}(0)}{dt}=0.$$

2) 现在研究 $J_i(t)$ 所满足的正则条件,首先讨论 $J_1(t)$. 令 $t_1-t_2=\varepsilon>0$. 若 $t_2\leqslant\varepsilon$, 则由 $\mu(0)=0$ 得

$$\mu(t_i)K(t_i,0)=O(\varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}}\|\mu\|_{(0,\lambda)}),\qquad i=1,2. \tag{1.26}$$

当 $t_2\geqslant\varepsilon$ 时有

$$\mu(t_1)K(t_1,0)-\mu(t_2)K(t_2,0)=[\mu(t_1)-\mu(t_2)]K(t_1,0)$$
$$+\mu(t_2)[K(t_1,0)-K(t_2,0)]=O(\varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}}\|\mu\|_{(0,\lambda)}). \tag{1.27}$$

现在讨论函数

$$p(t)=\int_0^t\frac{\partial K(t,t-h)}{\partial t}dh.$$

$$p(t_1)-p(t_2)=\int_0^\varepsilon\frac{\partial K(t_1,t_1-h)}{\partial t}dh-\int_0^\varepsilon\frac{\partial K(t_2,t_2-h)}{\partial t}dh$$
$$+\int_\varepsilon^{t_2}\left[\frac{\partial K(t_1,t_1-h)}{\partial t}-\frac{\partial K(t_2,t_2-h)}{\partial t}\right]dh$$
$$+\int_{t_2}^{t_1}\frac{\partial K(t_1,t_1-h)}{\partial t}dh.$$

由于曲线 S 的光滑性,当 $h>0$ 时,

$$\frac{\partial K(t,t-h)}{\partial t}=O(h^{\lambda-\frac{3}{2}}),$$

$$\frac{\partial K(t_1,t_1-h)}{\partial t}-\frac{\partial K(t_2,t_2-h)}{\partial t}=O(\varepsilon^{\lambda}h^{-\frac{3}{2}}),$$

所以,

$$p(t_1)-p(t_2)=O(\varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}}),$$

由此推出

$$\mu(t_1)p(t_1)-\mu(t_2)p(t_2)=O(\varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}}\|\mu\|_{(0,\lambda)}). \quad (1.28)$$

估值 (1.26)—(1.28) 说明 $J_1(t)$ 在 $[0, T]$ 上满足指数为 $\lambda-\frac{1}{2}$ 的正则条件，且其正则系数可用 $\|\mu\|_{(0,\lambda)}$ 估计。

3） 现讨论 $J_2(t)$。

$$J_2(t_1)-J_2(t_2)=\int_{t_2-\varepsilon}^{t_1}[\mu(\tau)-\mu(t_1)]\frac{\partial K(t_1,\tau)}{\partial t}d\tau$$

$$-\int_{t_2-\varepsilon}^{t_2}[\mu(\tau)-\mu(t_2)]\frac{\partial K(t_2,\tau)}{\partial t}d\tau+\int_0^{t_2-\varepsilon}\Big\{[\mu(\tau)$$

$$-\mu(t_1)]\frac{\partial K(t_1,\tau)}{\partial t}-[\mu(\tau)-\mu(t_2)]\frac{\partial K(t_2,\tau)}{\partial t}\Big\}d\tau.$$

由于 (1.13)，第一个积分不超过

$$O(\varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}}\|\mu\|_{(0,\lambda)});$$

第二个积分可以类似地估计。 把第三个积分写成和的形式，再利用 (1.13) 和 (1.25) 进行估值:

$$\int_0^{t_2-\varepsilon}[\mu(\tau)-\mu(t_2)]\left[\frac{\partial K(t_1,\tau)}{\partial t}-\frac{\partial K(t_2,\tau)}{\partial t}\right]d\tau$$

$$+\int_0^{t_2-\varepsilon}[\mu(t_2)-\mu(t_1)]\frac{\partial K(t_1,\tau)}{\partial t}d\tau$$

$$=O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}\Big|\int_0^{t_2-\varepsilon}(t_2-\tau)^{\lambda}[\varepsilon^{\lambda}(t_2-\tau)^{-\frac{3}{2}}+\varepsilon(t_2-$$

$$-\tau)^{-\frac{5}{2}}]d\tau\Big|)+O(\|\mu\|_{(0,\lambda)}\varepsilon^{\lambda}\Big|\int_0^{t_2-\varepsilon}(t_1-\tau)^{-\frac{3}{2}}d\tau\Big|)$$

$$=O(\varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}}\|\mu\|_{(0,\lambda)}).$$

至此，定理 3 证毕。

§3 密度为 $C^{(n,\lambda)}$ 类函数 $\left(0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 的热势的直接值

定理 4 设曲线 $S\in(n+1,\lambda)$，$n\geqslant 0$，$0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$，

密度 $\mu(t)$ 在 $l=[0, T]$ 上属于 (n, λ)，并且，$\mu(0)=\mu'(0)=\cdots\cdots=\mu^{(n)}(0)=0$. 这时，双层热势的直接值 $W_{st}(t)$ 和单层热势对 x 的导数的直接值 $V_{xst}(t)$ 比其密度的光滑性高半阶，即 $W_{st}(t)$ 和 $V_{xst}(t)$ 在 l 上属于 $\left(n, \lambda'+\frac{1}{2}\right)$ 类，同时，

$$\|W_{st}\|_{(n, \lambda'+\frac{1}{2})}=O(\|\mu\|_{(n, \lambda)}), \tag{1.29}$$

$$\|V_{xst}\|_{(n, \lambda'+\frac{1}{2})}=O(\|\mu\|_{(n, \lambda)}), \tag{1.30}$$

这里，当 $0\leqslant\lambda<\frac{1}{2}$ 时，$\lambda'=\lambda$；当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\lambda'<\frac{1}{2}$ 是任意的. (1.29)、(1.30) 右端的 O 只与 S 和 l 及 λ' 有关，而与 μ 无关. 这时，

$$W_{st}(0)=W_{st}(0)=\cdots\cdots=W_{st}^{(n)}(0)=0,$$

$$V_{xst}(0)=V'_{xst}(0)=\cdots\cdots=V_{xst}^{(n)}(0)=0.$$

推论 在上述定理中，若密度 μ 或其某级导数在零点不取零值，则定理 4 只在 l 内任一闭区间 $l_\delta=[\delta, T]$ 上成立，$\delta>0$，同时，

$$\|W_{st}\|_{C^{(n, \lambda'+\frac{1}{2})}(l_\delta)}=O(\|\mu\|_{C^{(n, \lambda)}(l)}), \tag{1.29'}$$

$$\|V_{xst}\|_{C^{(n, \lambda'+\frac{1}{2})}(l_\delta)}=O(\|\mu\|_{C^{(n, \lambda)}(l)}), \tag{1.30'}$$

这里的 O 与 δ 的选择有关. 在这种情况下，W_{st} 及 V_{xst} 和它们的导数在零点一般不取零值.

证明:

定理 4 的证明较长，我们分五段叙述. 当 $n=0$ 时，定理 4 即是定理 2; 尽管如此，我们还是单独证明了定理 2，这样可以大大缩短定理 4 的证明. 于是，我们只讨论 $n\geqslant 1$ 的情形，并不妨只证明 (1.29).

1) $W_{st}(t)$ 的 n 阶导数

$$W_{st}(t)=\int_0^t \frac{\mu(t-r)}{2\sqrt{\pi r}}R(t, r)dr,$$

$$R(t,r)=\frac{\psi(t)-\psi(t-r)}{2\sqrt{r}}e^{-\frac{[\psi(t)-\psi(t-r)]^2}{4r}}.$$

因此，当 $t>0$ 时，$W_{st}(t)$ 的 n 阶导数为下面一些积分及函数微分之和：

$$\int_0^t \frac{\mu^{(k)}(t-r)}{2\sqrt{\pi r}}R^{(n-k)}(t,r)dr,\qquad 0\leqslant k\leqslant n,\quad (1.31)$$

$$\frac{d^p}{dt^p}\left[\mu^{(s)}(0)\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}R^{(n-1-s-p)}(t,t)\right],0\leqslant s+p\leqslant n-1,\quad (1.32)$$

$$R^{(m)}(t,r)=\frac{\partial^{(m)}R(t,r)}{\partial t^m},\qquad 0\leqslant m\leqslant n,$$

当 $\mu(0)=\mu'(0)=\cdots\cdots=\mu^{(n)}(0)=0$ 时，(1.32) 均为零，所以，为证明定理 4，只需讨论积分 (1.31).

2) 积分核 $R^{(q)}(t,r)$

为研究核 $R^{(q)}(t,r)$ 的形状 $(0\leqslant q\leqslant n)$，引入下述运算符号.

设函数 $\psi=\psi(t)$，其差分记为

$$\Delta\psi(t)=\psi(t)-\psi(\tau),$$

在差分中做变量替换 $\tau=t-r$ 后得到

$$\overline{\Delta\psi(t)}=\Delta\psi(t)\big|_{\tau=t-r}=\psi(t)-\psi(t-r).$$

差分 $\Delta\psi(t)$ 对 t 的微分与变量替换的顺序是可易的，即

$$\overline{\Delta\psi(t)}'=\psi'(t)-\psi'(t-r)=\overline{\Delta\psi'(t)}.$$

应用上述符号，把 $R(t,r)$ 表示为

$$R(t,r)=\frac{\overline{\Delta\psi}}{2\sqrt{r}}e^{-\frac{(\overline{\Delta\psi})^2}{4r}}=\frac{\overline{\Delta\psi}}{2\sqrt{r}}f\left(\frac{\overline{\Delta\psi}}{4r}\right)$$

$$=F\left(\frac{\overline{\Delta\psi}}{2\sqrt{r}}\right)=F\left(\frac{\overline{\Delta\psi}}{\eta}\right)=F(\xi),$$

其中，

$$\xi = \frac{\overline{\Delta\psi}}{\eta},$$

$$\eta = 2\sqrt{r},$$

$$F(\xi) = \xi f(\xi),$$

$$f(\xi) = e^{-\xi^2}.$$

$F(\xi)$ 对 t 的 q 级导数为一含有 ξ 及其直至 q 级导数的常系数多元多项式与 $f(\xi)$ 之积，此多项式无常数项，并且，只有一项中含有 ξ 的 q 级导数，它等于

$$(1-2\xi^2)\xi^{(q)}.$$

设此多元多项式中 ξ 及其直至 q 级导数的最高幂次为 m_q，则可写

$$F^{(q)}(\xi) = f(\xi)(P_{0,q}(\xi) + P_{1,q}(\xi)),$$

$$P_{0,q}(\xi) = (1-2\xi^2)\xi^{(q)},$$

$$P_{1,q}(\xi) = \sum_{\substack{a_i=0 \\ 1\leqslant i\leqslant q-1 \\ \sum a_i \geqslant 1}}^{m_q} K_{a_0a_1\cdots a_{q-1}}(\xi)^{a_0}(\xi')^{a_1}\cdots(\xi^{(q-1)})^{a_{q-1}},$$

$K_{a_0a_1\cdots a_{q-1}}$ 为某些常数.

由于 $\psi \in (n+1,\lambda)$，故当 $0\leqslant q\leqslant n$ 时，

$$\xi^{(q)} = \left(\frac{\overline{\Delta\psi}}{\eta}\right)^{(q)} = \frac{\overline{\Delta\psi^{(q)}}}{\eta} = \frac{\psi^{(q)}(t) - \psi^{(q)}(t-r)}{2\sqrt{r}}$$

$$= O(\sqrt{r}), \tag{1.33}$$

而

$$\xi^{(n+1)} = O(r^{\lambda-\frac{1}{2}}). \tag{1.34}$$

因此，

$$F^{(q)}(\xi) = O(r^{1/2}), \qquad 0\leqslant q\leqslant n, \tag{1.35}$$

$$F^{(n+1)}(\xi) = O(r^{\lambda-\frac{1}{2}}). \tag{1.36}$$

估值 (1.35) 保证了积分 (1.31) 的一致收敛性，因而，上面对 $W_{st}(t)$ 的 n 阶导数的计算是正确的，并且，由 (1.35) 立即推出，W_{st} 及其直至 n 阶导数在 $t=0$ 时取零值.

3) 积分

$$I_k(t)=\int_0^t \frac{\mu^{(k)}(t-r)}{2\sqrt{\pi r}} R^{(n-k)}(t, r)dr, 1\leqslant k\leqslant n-1.$$

当 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 时，由于估值 (1.35)，可对 $I_k(t)$ 再在积分号下微分一次：

$$I_k'(t)=\int_0^t \frac{\mu^{(k+1)}(t-r)}{2\sqrt{\pi r}} R^{(n-k)}(t, r)dr$$

$$+\int_0^t \frac{\mu^{(k)}(t-r)}{2\sqrt{\pi r}} R^{(n+1-k)}(t, r)dr.$$

从 (1.35) 可见，$I_k'(t)$ 在 l 上为连续函数，并且，

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}|I_k'(t)|=O(\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\mu^{(k+1)}(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\mu^{(k)}(t)|)$$

$$=O(\|\mu\|_{C^{(n,\lambda)}(l)}),$$

所以，$I_k(t)$ 在 l 上是 $\left(0, \lambda'+\frac{1}{2}\right)$ 类函数，同时，它们在这个函数类中的模可用 $\|\mu\|_{(n,\lambda)}$ 估值. 这样，为证明定理 4，只需讨论积分 $I_0(t)$ 和 $I_n(t)$，需要证明它们在 l 上属于 $\left(0, \lambda'+\frac{1}{2}\right)$ 类，且其模可用 $\|\mu\|_{(n,\lambda)}$ 估值.

4) 函数 $I_n(t)=\int_0^t \frac{\mu^{(n)}(t-r)}{2\sqrt{\pi r}} R(t, r)dr$

做替换 $r=t-\tau$，把 $I_n(t)$ 写为

$$I_n(t)=\int_0^t \mu^{(n)}(\tau)K(t, \tau)d\tau,$$

这里的 K 是积分核 (1.3).

由于 $\mu^{(n)}\in(0, \lambda)$，$\mu^{(n)}(0)=0$，故根据定理 2，$I_n(t)$

在 l 上属于 $\left(0,\ \lambda'+\frac{1}{2}\right)$ 类函数，且

$$\|I_n\|_{(0,\ \lambda'+\frac{1}{2})} = O(\|\mu^{(n)}\|_{(0,\ \lambda)}) = O(\|\mu\|_{(n,\ \lambda)}).$$

5) 函数 $\quad I_0(t) = \int_0^t \frac{\mu(t-r)}{2\sqrt{\pi r}} R^{(n)}(t, r)dr$

为证完定理 4，只剩下讨论 $I_0(t)$ 了，需要证明

$$\|I_0\|_{(0,\ \lambda'+\frac{1}{2})} = O(\|\mu\|_{(n,\ \lambda)}). \tag{1.37}$$

由于

$$R^{(n)}(t, r) = F^{(n)}(\xi) = f(\xi)(P_{0,n}(\xi) + P_{1,n}(\xi)),$$

可以把 I_0 写成两项积分之和:

$$I_0(t) = I_{01}(t) + I_{02}(t),$$

$$I_{01}(t) = \int_0^t \frac{\mu(t-r)}{2\sqrt{\pi r}} f(\xi)P_{0,n}(\xi)dr,$$

$$I_{02}(t) = \int_0^t \frac{\mu(t-r)}{2\sqrt{\pi r}} f(\xi)P_{1,n}(\xi)dr.$$

因为 $P_{1,n}(\xi)$ 中只含有 ξ 对 t 的直到 $n-1$ 阶导数，所以，可以对 $I_{02}(t)$ 在积分号下进行微分. 这样，为证明 (1.37)，只需讨论函数 $I_{01}(t)$.

由于

$$P_{0,n}(\xi) = (1-2\xi^2)\xi^{(n)},$$

又可以把 $I_{01}(t)$ 写成差的形式:

$$I_{01}(t) = I_{011}(t) - I_{012}(t),$$

$$I_{011}(t) = \int_0^t \frac{\mu(t-r)}{2\sqrt{\pi r}} \xi^{(n)} f(\xi)dr,$$

$$I_{012}(t) = \int_0^t \frac{\mu(t-r)}{\sqrt{\pi r}} \xi^2\xi^{(n)} f(\xi)dr.$$

鉴于估值 (1.33) (1.34)，可以对 $I_{012}(t)$ 在积分号下微分. 这样，为证明 (1.37)，只需讨论函数 $I_{011}(t)$.

把 $I_{011}(t)$ 写成

$$I_{011}(t)=\int_0^t \frac{\mu(\tau)[\phi^{(n)}(t)-\phi^{(n)}(\tau)]}{4\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}e^{-\frac{[\phi(t)-\phi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}}d\tau$$

$$=\int_0^t \mu(\tau)Q(t,\tau)d\tau.$$

显然，

$$Q(t,\tau)=O(|t-\tau|^{-\frac{1}{2}}), \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\tau)=O(|t-\tau|^{-\frac{3}{2}}). \tag{1.39}$$

设 $t_1-t_2=\varepsilon>0$. 若 $t_2\leqslant\varepsilon$, 则由 (1.38) 推得

$$I_{011}(t_i)=O(\|\mu\|_{(n,\lambda)}\varepsilon^{\lambda+\frac{1}{2}}),\qquad i=1,2.$$

当 $t_2\geqslant\varepsilon$ 时，把差 $I_{011}(t_1)-I_{011}(t_2)$ 写成:

$$I_{011}(t_1)-I_{012}(t_2)=\mu(t_2)\left[\int_0^{t_1}Q(t_1,\tau)d\tau-\int_0^{t_2}Q(t_2,\tau)d\tau\right]$$

$$+\left\{\int_0^{t_1}[\mu(\tau)-\mu(t_2)]Q(t_1,\tau)d\tau\right.$$

$$\left.-\int_0^{t_2}[\mu(\tau)-\mu(t_2)]Q(t_2,\tau)d\tau\right\}. \tag{1.40}$$

估值 (1.38) (1.39) 保证了花括号内的差式有形如

$$O(\varepsilon^{\frac{1}{2}+\lambda'}\|\mu\|_{(n,\lambda)})$$

的估值. 最后，只剩下讨论带方括号的差式了.

为此，引人参数 θ, 把 $\phi^{(n)}(t)-\phi^{(n)}(\tau)$ 写成

$$\phi^{(n)}(t)-\phi^{(n)}(\tau)=\int_1^0\frac{d\phi^{(n)}(t-\theta(t-\tau))}{d\theta}d\theta$$

$$=(t-\tau)\int_0^1\phi^{(n+1)}(t-\theta(t-\tau))d\theta.$$

这时，

$$J(t)=\int_0^t Q(t,\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^1 d\theta\int_0^t\phi^{(n+1)}(t-\theta(t$$

$$-\tau))G(\phi(t),t;\phi(\tau),\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^1 d\theta\int_0^t$$

$$[\psi^{(n+1)}(t+\theta(t-\tau))-\psi^{(n+1)}(t_2)]G(\psi(t),t;$$

$$\psi(\tau),\tau)d\tau+\frac{1}{2}\psi^{(n+1)}(t_2)V_{1st}(t)$$

$$=V(t)+\frac{1}{2}\psi^{(n+1)}(t_2)V_{1st}(t).$$

这样，(1.40) 中带方括号的差式可写为

$$\mu(t_2)[J(t_1)-J(t_2)]=\mu(t_2)[V(t_1)-V(t_2)]$$
$$+\frac{\mu(t_2)}{2}\psi^{(n+1)}(t_2)[V_{1st}(t_1)-V_{1st}(t_2)].$$

最后的两个差式完全可以象讨论 (1.15) 中带方括号的差式时一样地进行估值，这里不再重复了. 应该指出，这些估值关于参数 θ 都是一致地成立的，因此，$V(t)$ 中含有关于 θ 的积分并不影响估值的结果.

至此，定理 4 证毕.

从定理 4 的证明过程中不难看出，当 $\mu(t)$ 或其某导数在零点不取零值时，则证明过程中诸估值只在 $[\delta, T]$ 上成立. 这时，还需要讨论函数微分 (1.32). 对它验证估值 (1.29′)(1.30′) 也是不困难的.

§4 密度为 $C^{(n,\lambda)}$ 类函数 $\left(\frac{1}{2}<\lambda\leqslant 1\right)$ 的热势的直接值

定理 5 设密度 $\mu(t)$ 在 $l=[0,T]$ 上属于 (n,λ) 类，$n\geqslant 0$，$1/2<\lambda\leqslant 1$，$\mu(0)=\mu'(0)=\cdots=\mu^{(n)}(0)=0$，曲线 S 属于 $(n+1,\lambda)$ 类. 这时，双层热势的直接值 $W_{st}(t)$ 和单层热势对 x 的导数的直接值 $V_{xst}(t)$ 比其密度的光滑性高半阶，即在 l 上 $W_{st}(t)$ 和 $V_{xst}(t)$ 属于 $\left(n+1,\lambda-\frac{1}{2}\right)$ 类，且

$$\|W_{st}\|_{(n+1,\lambda-\frac{1}{2})}=O(\|\mu\|_{(n,\lambda)}),\tag{1.41}$$

$$\|V_{xst}\|_{(n+1,\lambda-\frac{1}{2})}=O(\|\mu\|_{(n,\lambda)}), \tag{1.42}$$

这里的 O 只与曲线 S 以及 l 有关，与 μ 无关．在这种情况下，

$$W_{st}(0)=W'_{st}(0)=\cdots=W^{(n+1)}_{st}(0)=0,$$

$$V_{xst}(0)=V'_{xst}(0)=\cdots=V^{(n+1)}_{xst}(0)=0.$$

类似于定理 4 的推论，对定理 5 亦成立．

证明：

定理 5 中 $n=0$ 的情形已在定理 3 中讨论过了．我们现在只讨论 $n\geqslant 1$ 的情形，并只证明 (1.41)．

$W_{st}(t)$ 的 n 阶导数在定理 4 中已计算出来，它们是下面的一些积分之和：

$$I_k(t)=\int_0^t\frac{\mu^{(k)}(t-r)}{2\sqrt{\pi r}}R^{(n-k)}(t,r)dr,\quad 0\leqslant k\leqslant n.$$

当 $k=n$ 时，

$$I_n(t)=\int_0^t\frac{\mu^{(n)}(t-r)}{2\sqrt{\pi r}}R(t,r)dr.$$

根据定理 3，$I_n(t)$ 在 l 上属 $\left(1,\lambda-\frac{1}{2}\right)$ 类，并且，它在这个函数类中的模可用 $\|\mu\|_{(n,\lambda)}$ 估值，同时，$I'_n(0)=0$．

当 $1\leqslant k\leqslant n-2$时，由于 $\lambda>\frac{1}{2}$ 和估值 (1.36)，可以在 $I_k(t)$ 的积分号下对 t 微分两次，因此，这些函数在 l 上属于$\left(1,\lambda-\frac{1}{2}\right)$类，且其模可用 $\|\mu\|_{(n,\lambda)}$ 估值．显然，这些函数及其导数在 $t=0$ 时均为零．

综上所述，为证明定理5，只需讨论函数 $I_0(t)$ 和 $I_{n-1}(t)$，不妨只讨论 $I_0(t)$，$I_{n-1}(t)$ 可以完全类似地讨论．

由于 $\lambda>\frac{1}{2}$ 和估值 (1.36)，可在积分号下微分 $I_0(t)$：

$$\frac{dI_0(t)}{dt}=\int_0^t\frac{\mu^{(1)}(t-r)}{2\sqrt{\pi r}}R^{(n)}(t,r)dr+\int_0^t\frac{\mu(t-r)}{2\sqrt{\pi r}}$$

$$\times R^{(n+1)}(t,r)dr = I_0^1(t) + I_0^2(t).$$

显然，

$$\left.\frac{dI_0(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

由于定理 4 的证明中第 5 段的结果，为证明定理 5，可只讨论函数 $I_0^2(t)$.

根据定理 4 的证明中第 2 段的计算，

$$R^{(n+1)}(t, r) = f(\xi)(P_{0,n+1}(\xi) + P_{1,n+1}(\xi)),$$

$$\xi = \frac{\Delta\phi}{\eta} = \frac{\phi(t) - \phi(\tau)}{2\sqrt{r}} = \frac{\phi(t) - \phi(t-r)}{2\sqrt{r}}.$$

由于 $P_{1,n+1}(\xi)$ 中只含有 ξ 的直至 n 级的导数，所以，依估值 (1.36)，可在积分号下微分函数

$$\int_0^t \frac{\mu(t-r)}{2\sqrt{\pi r}} f(\xi) P_{1,n+1}(\xi) d\xi.$$

这样，为证明定理 5，只剩下讨论函数

$$J(t) = \int_0^t \frac{\mu(t-r)}{2\sqrt{\pi r}} P_{0,n+1}(\xi) f(\xi) dr$$

$$= \int_0^t \mu(\tau) M(t, \tau) d\tau,$$

此处

$$M(t,\tau) = \left[1 - \frac{[\phi(t) - \phi(\tau)]^2}{2(t-\tau)}\right] \cdot \frac{[\phi^{(n+1)}(t) - \phi^{(n+1)}(\tau)]}{4\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}$$

$$\times e^{-\frac{[\phi(t)-\phi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}}.$$

不难看出

$$M(t, \tau) = O((t-\tau)^{\lambda-\frac{3}{2}}) \tag{1.43}$$

$$M(t_1, \tau) - M(t_2, \tau) = O[(t_1 - t_2)^{\lambda}(t_2 - \tau)^{-\frac{3}{2}} + (t_1 - t_2)(t_2 - \tau)^{\lambda-\frac{5}{2}}], \quad t_1 > t_2. \tag{1.44}$$

现设 $t_1 - t_2 = \varepsilon > 0$. 若 $t_2 \leqslant \varepsilon$, 则由 (1.43) 得

$$J(t_i) = O(\|\mu\|_{(n,\lambda)}\varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}}). \qquad (1.45)$$

当 $t_2 \geqslant \varepsilon$ 时,由 (1.43) 和 (1.44) 推出

$$J(t_1, \tau) - J(t_2, \tau) = \int_0^{t_2-\varepsilon} \mu(\tau)[M(t_1, \tau) - M(t_2, \tau)]d\tau$$

$$+ \int_{t_2-\varepsilon}^{t_1} \mu(\tau)M(t_1, \tau)d\tau + \int_{t_2-\varepsilon}^{t_2} \mu(\tau)M(t_2, \tau)d\tau$$

$$= O(\|\mu\|_{(n,\lambda)}\varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}}). \qquad (1.46)$$

估值 (1.45) (1.46) 说明函数 $J(t)$ 在 l 上属于 $\left(0, \lambda - \frac{1}{2}\right)$ 类,且其模可用 $\|\mu\|_{(n,\lambda)}$ 估值.

至此,定理 5 证毕.

§5 热势直接值的增滑作用

把本节中所得到的结果综合起来,我们列表说明曲线热势的直接值在 $[\delta, T]$ 中的光滑性与其密度的光滑性及热势分布曲线的光滑性之间的关系,表 (3) 中,在各种情况下,直

表 3 热势直接值的光滑性

μ	S	$W_{st}(V_{xst})$
$(0, 0)$	$(0, \lambda)\ \frac{3}{4}<\lambda\leqslant 1$	$\left(0, 2\lambda - \frac{3}{2}\right)$
(n, λ) $n\geqslant 0$, $0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$	$(n+1, \lambda)$	$\left(n, \lambda' + \frac{1}{2}\right)$
(n, λ) $n\geqslant 0$, $\frac{1}{2}<\lambda\leqslant 1$	$(n+1, \lambda)$	$\left(n+1, \lambda - \frac{1}{2}\right)$

接值的模可以用相应的密度的模来估计. 当 $\mu \in (0, 0)$ 时,可取 $\delta = 0$; 在其它情况下, 若 $\mu(0) = \mu'(0) = \cdots =$

$\mu^{(n)}(0)=0$，则亦可取 $\delta=0$；表中当 $\lambda<\frac{1}{2}$ 时，$\lambda'=\lambda$；当 $\lambda=\frac{1}{2}$时，$\lambda'<\frac{1}{2}$ 是任意的.

从表中看出，当曲线 S 足够光滑时，热势直接值的光滑度比其密度的光滑度高 1/2 阶（在第一行中令 $\lambda=1$）. 我们把这种性质叫做热势直接值的增滑作用，即其能提高密度的光滑性，这种增滑作用在下例中特别明显.

设双层热势 $W[\mu]$ 的密度是由积分方程

$$\mu(t)+W_{st}[\mu]=\chi(t) \tag{1.47}$$

所确定的，并设曲线 S 属于 $(n+1,\lambda)$ 类，$1/2<\lambda\leqslant 1$，函数 $\chi(t)$ 属于 $\left(n+1,\lambda-\frac{1}{2}\right)$ 类，$\chi(0)=\chi'(0)=\cdots=\chi^{(n)}(0)=0$.

由于 (1.47) 的解 $\mu(t)$ 连续，根据定理 1，$W_{st}[\mu]$ 属于 $\left(0,\lambda-\frac{1}{2}\right)$ 类；但是，函数 $\chi(t)$ 也属于这一类，所以，密度$\mu(t)$ 应是$\left(0,\lambda-\frac{1}{2}\right)$类函数，且 $\mu(0)=0$. 再应用定理 2，得知 $W_{st}[\mu]$ 为 $(0,\lambda)$ 类函数，因之，由 (1.47) 看出，密度 $\mu(t)$ 的光滑度还可以提高半阶，即 $\mu\in(0,\lambda)$. 这时，再应用定理 3，又可以把密度的光滑度再提高半阶，即$\mu(t)\in\left(1,\lambda-\frac{1}{2}\right)$，同时，$\mu'(0)=0$. 此后，再 n 次交替使用定理 4 及定理 5，最终可以证明，$\mu\in\left(n+1,\lambda-\frac{1}{2}\right)$. 这样，双层热势的直接值 $W_{st}[\mu]$ 便将其密度 $\mu(t)$ 的光滑度由 $(0,0)$ 类提高到$\left(n+1,\lambda-\frac{1}{2}\right)$类.

通常，称定理 4 和定理 5 为**曲线热势直接值增滑作用的定理**.

第二节 热势论的一个逆问题

在前一章中，讨论了热势的光滑性对其密度的光滑性的依赖关系．本节中，将研究热势论的一个逆问题，即从热势本身的光滑性出发，讨论它的密度的光滑性．

§1 辅助定理

先讨论二元函数在一维曲线上的一些性质．设连续函数 $F(x, y)$ 定义在 (x, y) 平面某区域 g 上，(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 为 g 内任意二点，r 是它们间的距离．如果有 $\alpha \geqslant 0$ 和 $A>0$ 存在，使

$$|F(x_1,y_1) - F(x_2,y_2)| \leqslant Ar^\alpha,$$

则称 F 在 g 内满足指数为 α 的正则条件．这样，就可以定义 $c^{(n,\lambda)}$ 类二元函数了．

辅助定理 设曲线 S 为 (x, y) 平面上有界区域 g 内一条曲线：

$$y = \phi(x), \qquad x \in L = [0, l].$$

若 $S \in C^{(n,\lambda)}$ 类，$n > 0$，则当二元函数 $F(x,y) \in C^{(n,\lambda)}(g)$ 时，它在 S 上取值

$$\Phi(x) = F(x, \phi(x)) \in C^{(n,\lambda)}(L),$$

且

$$\|\Phi\|_{C^{(n,\lambda)}(L)} = O(\|F\|_{C^{(n,\lambda)}(g)}), \tag{2.1}$$

这里的 O 与函数 F 无关；当 $n = 0$ 时，若 $S \in (1, 0)$，则 (2.1) 仍成立．

证明：

显然，

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l} \Phi(x) \leqslant \max_{(x,y)\in g} F(x, y) = F_0; \tag{2.2}$$

同时，由于 $\psi \in C^{(n,\lambda)}$ 类，所以，复合函数 $F(x, \psi(x))$ 对 x 有直到 n 阶的连续导数.

以 $F^{(p,q)}$ 表示 $\partial^{(p+q)}F(x, y)/\partial x^p \partial y^q$. 不难看出，$\Phi^{(k)}(x)$ 的一般形式为

$$\Phi^{(k)}(x) = \sum_{\substack{1\leqslant p+q\leqslant k \\ 0\leqslant p,\ q\leqslant k}} a_{p,q} F^{(p,q)} \prod_{0\leqslant m_{pq}\leqslant k} [\psi^{(m_{pq})}],$$

$$1 \leqslant k \leqslant n, \tag{2.3}$$

其中 $a_{p,q}$ 为某些常数，$\psi^{(m_{pq})}$ 表示 $\psi(x)$ 的 m_{pq} 阶导数. 因此 $\Phi^{(n)}(x)$ 是 $C^{(0,\lambda)}$ 类函数，即 $\Phi(x) \in C^{(n,\lambda)}$.

现在估计 $\Phi^{(n)}(x)$ 的正则系数. 显然，当 (2.3) 中的 $p+q=n$ 时，则这些加项的正则系数可用 F 的 n 阶导数在 g 内的正则系数估值，因之，可用 F 在 $C^{(n,\lambda)}(g)$ 中的模估值. 若(2.3)中的 $1\leqslant p+q<n$，则这些加项的正则系数可以用 F 的 $p+q+1$ 阶导数在 g 中的最大值估计. 不难证明，这些最大值均可用 F 的 n 阶导数在 g 内的正则系数和 F_0 之和估值，因此，可用 $\|F\|_{C^{(n,\lambda)}(g)}$ 估值. 这样，我们证明了 (2.1).

§2 热势论的一个逆问题

令 $g_{\pm\varepsilon}$ 是曲线 S 某侧一开区域:

$$g_{\pm\varepsilon} = \{(x, t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ \min[\psi(t) \pm \varepsilon, \psi(t)] < x < \\ < \max[\psi(t) \pm \varepsilon, \psi(t)]\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

$g_{+\varepsilon}$ 在 S 右侧，$g_{-\varepsilon}$ 在 S 左侧.

下面的两个定理可以类似地证明.

定理 1 假设双层热势的密度 $\mu(t)$ 是连续函数.

1) 若 $W(x, t)$ 做为 (x, t) 的二元函数在 $\bar{g}_{+\varepsilon}$ (或 $\bar{g}_{-\varepsilon}$) 属于 $(0, \lambda)$ 类，$0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$，$S$ 连续可微，则 $\mu(t)$ 在 $l=[0, T]$ 上属于 $(0, \lambda)$ 类，且

$$\|\mu\|_{(0,\lambda)} = O(\|W\|_{(0,\lambda)}); \tag{2.2}$$

2) 若 $S\in(n+\alpha, \lambda+\beta)$, 这里当 $n>0$, $0<\lambda<\frac{1}{2}$ 时, $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{2}$; 当 $n\geqslant 0$, $\frac{1}{2}\leqslant\lambda<1$ 时, $\alpha=1$, $\beta=-1/2$, 并且, $W(x,t)$ 做为二元函数在 $\bar{g}_{+\varepsilon}$(或 $\bar{g}_{-\varepsilon}$)内属 (n,λ) 类, $W(x,t)$ 及其直至 n 阶导数在 $t=0$ 时取零值, 则 $\mu(t)$ 在 l 上属于 (n,λ) 类,同时,

$$\|\mu\|_{(n,\lambda)} = O(\|W\|_{(n,\lambda)}); \tag{2.3'}$$

在这种情况下, $\mu(t)$ 及其所有导数在零点取零值.

定理 2 设单层热势的密度 $\mu(t)$ 为连续函数.

1) 若 $S\in(1,0)$, 且 $\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}$ 做为二元函数在 $\bar{g}_{+\varepsilon}$(或 $\bar{g}_{-\varepsilon}$) 内属于 $(0,\lambda)$ 类, $0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$, 则 $\mu(t)$ 在 l 上属于 $(0,\lambda)$ 类,且

$$\|\mu\|_{(0,\lambda)} = O\left(\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|_{(0,\lambda)}\right); \tag{2.4}$$

2) 若 $S\in(n+\alpha, \lambda+\beta)$, $\frac{\partial V}{\partial x}$ 做为二元函数在 $\bar{g}_{+\varepsilon}$ (或 $\bar{g}_{-\varepsilon}$) 内属于 (n,λ) 类,则 $\mu\in(n,\lambda)$, 且

$$\|\mu\|_{(n,\lambda)} = O(\|\partial V/\partial x\|_{(n,\lambda)}), \tag{2.5}$$

同时, $\mu(t)$ 及其所有导数在零点取零值.

证明:

我们只证明定理 1.

用 $F(t)$ 表示双层热势 $W(x,t)$ 在曲线 S 上的极限值. 由辅助定理知, $F(t)$ 为 $l=[0,T]$ 上的 (n,λ) 类函数, 且

$$\|F\|_{C^{(n,\lambda)}(l)} = O(\|W\|_{C^{(n,\lambda)}(\bar{g}\pm\varepsilon)}). \tag{2.6}$$

另一方面,由于 μ 连续,故由第二章跃度公式知, $W(x,t)$

在 S 上的值为

$$W_{st}(t) \pm \frac{\mu(t)}{2},$$

所以,我们可写

$$F(t) = W_{st}(t) \pm \frac{\mu(t)}{2}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.7}$$

这样，根据前节定理 1 和 (1.1)式，为证明本定理第一个论断,只需证明

$$\|\mu\|_{C^{(0)}(l)} = O(\|F\|_{C^{(0)}(l)}),$$

可是,这个估值式已在第三章第一节中证明过了.(见第三章(1.13))

根据定理 1 的第一个论断，不难证明它的第二个论断。事实上,当 $n = 0, \frac{1}{2} \leqslant \lambda < 1$ 时,由于第一个论断可写

$$\|\mu\|_{C^{(0,\lambda-\frac{1}{2})}(l)} = O(\|F\|_{C^{(0,\lambda-\frac{1}{2})}(\bar{g}\pm\varepsilon)}),$$

这时,从 (2.7) 式出发,应用前节定理 2 有

$$\begin{aligned}\|\mu\|_{(0,\lambda)} &= O(\|\mu\|_{(0,\lambda-\frac{1}{2})} + \|F\|_{(0,\lambda)}) \\ &= O(\|F\|_{(0,\lambda)}) = O(\|W\|_{(0,\lambda)}),\end{aligned} \tag{2.8}$$

这就证明了在 $n = 0, \frac{1}{2} \leqslant \lambda < 1$ 时定理 1 的正确性. 为了证明它在 $n > 0$ 时的正确性,只需要从 (2.8) 出发，多次反复对 (2.7) 式中的 W_{st} 使用前节定理 4 和定理 5.

定理 1 证毕.

在定理 1 和定理 2 中,如果 $W \in (n, 1)$类,则当 $S \in (n+1, \gamma)$ $\left(\gamma > \frac{1}{2}\right)$ 时, (2.3) 和 (2.5) 仍成立.

把定理 1 与定理 2 和第五章第二节的基本定理相比较，可以看出: 当曲线 S 足够光滑时(它的光滑性由本节定理 1

和定理 2 决定），双层热势 W（单层热势 V）在区域 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(2n,2\lambda)}$ （$B^{(2n+1,2\lambda)}$）$\left(0<\lambda<\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $B^{(2n+1,2\lambda-1)}$ （$B^{(2n+2,2\lambda-1)}$）$\left(\dfrac{1}{2}\leqslant\lambda<1\right)$ 的充要条件是它们的密度在 $l=[0, T]$ 上属于 $C^{(n,\lambda)}$ 类。

第二部分　热势论在数学物理中的应用

第一章　B 估　值

第一节　热传导边值问题的 $B^{(1,\lambda)}$ 解

本书第一部分中，系统地介绍了热势论的基本内容.

由于各种热势满足(齐次和非齐次)热传导方程，所以，自然要把热势论的结果应用于研究传热问题. 在本章中，我们用热势理论对热传导方程的解做进一步的探讨：一方面，我们需要讨论它们的光滑性与各种已知条件的光滑性之间的依赖关系；同时，还要对这种依赖关系做出数值方面的刻划，即建立某些估值.由于这些估值是在 $B^{(n,\lambda)}$ 度量意义下描述的，所以，它们统称为 B 估值.

在本部分第二至第三章中，将继续发展本章中所得到的结果，把它们推广于变系数的热传导方程以及一般的抛物型方程. 最后，还将讨论带有间断系数的抛物型方程，这些结果构成了近代微分方程理论的重要篇章. 尽管如此，这些推广只是技术性的工作，它们是借助于泛函分析方法完成的. 然而，总观本书第一部分和第二部分的所有内容后，应该承认：近代微分方程理论中真正的本质性的东西，早就孕育在热势论的基本内容中了.

第一部分第三章中，介绍了利用热势解算各种传热问题的方法. 本节中，为了叙述方便起见，将第二边值问题做为典型例子进行详细的研究，同时，也写出有关其它边值问题的结果.

1. 首先，在齐次初始条件下，讨论齐次热传导方程的第二边值问题. 我们仍使用第一部分第三章第一节中的记号.

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u}{\partial t}=0, \quad (x,t)\in g=\{(x,t),\ \phi_1(t)<x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad <\phi_2(t),\ 0<t<T\}; \quad (1.1)\\
u(x,0)=0, \quad x\in k=\{\phi_1(0)\leqslant x\leqslant\phi_2(0)\}; \quad (1.2)\\
\dfrac{\partial u(\phi_i(t),t)}{\partial x}=\chi_i(t),\ t\in l=[0\leqslant t\leqslant T],\ i=1,2; \quad (1.3)\\
\chi_1(0)=\chi_2(0)=0. \quad (1.4)
\end{cases}
$$

我们假定 S_i 连续可微，$\chi_i(t)$ 在 l 上属于 $(0,\lambda)$ 类，$0\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$, $i=1,2$.

问题 (I) 的解可以写成两个单层热势的和的形式:

$$u(x,t)=V^1[\mu_1]+V^2[\mu_2], \qquad (1.5)$$

其中 V^i 是分布在曲线 S_i 上的热势，$i=1,2$, 而密度 $\mu_1(t)$、$\mu_2(t)$ 是下面的积分方程组的解:

$$
\left.\begin{aligned}
-\frac{\mu_1(t)}{2}+V^1_{xst}[\mu_1]+\bar V^2_x[\mu_2]=\chi_1(t),\\
\frac{\mu_2(t)}{2}+V^2_{xst}[\mu_2]+\bar V^1_x[\mu_1]=\chi_2(t);
\end{aligned}\right\} \qquad (1.6)
$$

其中$V^i_{xst}[\mu_i]$是热势$V^i[\mu_i]$对 x 的导数在曲线 S_i 上的直接值，$\bar V^i_x[\mu_i]$ 是热势 $V^i[\mu_i]$ 对 x 的导数在曲线 S_j 上的值，$i=1$, 2; 当 $i=1$ 时，$j=2$，当 $i=2$ 时，$j=1$.

在第一部分第三章第一节中已说明过，这个方程组的解连续，并且，

$$
\begin{aligned}
\mu_0&=\max\{\max_l|\mu_1(t)|,\ \max_l|\mu_2(t)|\}\\
&=O(\chi_0=\max\{\max_l|\chi_1(t)|,\ \max_l|\chi_2(t)|\}. \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

现在，应用第一部分第五章和第六章的结果，对问题 (I) 的解进行更深入的讨论.

首先指出，由于曲线 S_1 和 S_2 不相交，所以，当 μ_i 连续时，函数 $\bar{V}_x^i[\mu_i]$ 在 l 内属 $(0, \lambda)$ 类，而且，显然，

$$\|\bar{V}_x^i\|_{(0,\lambda)} = O(\mu_0), \tag{1.8}$$

这里的 O 与 μ_i 无关，$i = 1, 2$。

根据第一部分第六章第一节定理 1，(1.6) 中两个直接值 $V_{xst}^i[\mu_i]$ 在 l 内属于 $(0, \lambda)$类，并且，它们在这个函数类中的模可以用 μ_0 估值。这时，我们从方程组 (1.6)，估值式 (1.8) 以及关于 χ_i 的光滑性的假定可以看出，密度 $\mu_i(t)$ 在 l 上也是 $(0, \lambda)$ 类函数，而且，

$$\|\mu_i\|_{(0,\lambda)} = O\left(\sum_{j=1}^{2}\{\|V_{xst}^j\|_{(0,\lambda)} + \|\bar{V}_x^j\|_{(0,\lambda)} + \|\chi_j\|_{(0,\lambda)}\}\right)$$

$$= O\left(\mu_0 + \sum_{j=1}^{2}\|\chi_j\|_{(0,\lambda)}\right)$$

$$= O\left(\chi_0 + \sum_{j=1}^{2}\|\chi_j\|_{(0,\lambda)}\right) = O\left(\sum_{j=1}^{2}\|\chi_j\|_{(0,\lambda)}\right),$$

$$i = 1, 2. \tag{1.9}$$

由于协调条件 (1.4)，从 (1.6) 不难看出，

$$\mu_i(0) = 0, \qquad i = 1, 2.$$

这样，应用第一部分第五章第二节定理 4，我们得到：单层热势 $V^i[\mu_i]$ 在 $\bar{g}$ 内是 $B^{(1,2\lambda)}$ 类函数，并且，

$$\|V^i[\mu_i]\|_{B^{(1,2\lambda)}} = O(\|\mu_i\|_{(0,\lambda)}).$$

因而，问题 (I) 的解 $u(x, t)$ 在 $\bar{g}$ 内是 $B^{(1,2\lambda)}$ 类函数，并且，由 (1.9) 得到

$$\|u\|_{B^{(1,2\lambda)}(\bar{g})} = O\left(\sum_{j=1}^{2}\|\mu_j\|_{(0,\lambda)}\right) = O\left(\sum_{j=1}^{2}\|\chi_j\|_{C^{(0,\lambda)}(l)}\right), \tag{1.10}$$

这里的 O 与解 u 及 χ_i 无关，$i = 1, 2$。

2. 现在，我们在齐次初始条件和边界条件下，讨论非齐

次热传导方程的第二边值问题:

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u}{\partial t}=f(x,t), & (x,t)\in g; \quad (1.11)\\
u(x,0)=0, & x\in k; \quad (1.12)\\
\dfrac{\partial u(\psi_i(t),t)}{\partial x}=0, & t\in l,\ i=1,2. \quad (1.13)
\end{cases}
$$

假定 S_i 连续可微，$i=1, 2$，$f(x, t)$ 在 $\bar{g}$ 内连续，并对 x 或 t 满足指数大于零的正则条件.

根据第一部分第二章第二节基本公式 (2.8)，可以把问题 (II) 的解写成和的形式:

$$
u(x,t)=w(x,t)+U[-f], \tag{1.14}
$$

其中 $U[-f]$ 是密度为 $-f$ 的面热势，$w(x, t)$ 是下述问题的解:

$$
(\mathrm{III})\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{\partial w}{\partial t}=0, & (x,t)\in g; \quad (1.15)\\
w(x,0)=0, & x\in k; \quad (1.16)\\
\dfrac{\partial w(\psi_i(t),t)}{\partial x}=-\left.\dfrac{\partial U[-f]}{\partial x}\right|_{s_i}, & t\in l,\ i=1,2. \quad (1.17)
\end{cases}
$$

由于 f 在 $\bar{g}$ 内连续，故从第一部分第五章第三节定理 1 知，

$U[-f]$ 在 $\bar{g}$ 内为 $B^{(1,1)}$类函数，且

$$
\|U[-f]\|_{B^{(1,1)}}=O(f_0=\max_{\bar{g}}|f(x,t)|). \tag{1.18}
$$

根据第一部分第六章第二节辅助定理，$\left.\dfrac{\partial U[-f]}{\partial x}\right|_{s_i}$ 为 l 上的 $(0, \lambda)$ 类函数，并且，

$$
\left\|\left.\frac{\partial U[-f]}{\partial x}\right|_{s_i}\right\|_{C^{(0,\lambda)}(l)}=O\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{C^{(0,\lambda)}(\bar{g})}\right)
=O(\|U\|_{B^{(1,1)}(\bar{g})})=O(f_0), \tag{1.19}
$$

这里的 $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$ 是任意的.

不难看出，

$$\frac{\partial U[-f]}{\partial x}\bigg|_{t=0} = 0,$$

因此，根据第 1 段中对问题 (I) 的讨论，当 S_i 连续可微时，问题 (III) 有在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(1,2\lambda)}$ 类的解，且

$$\|w\|_{B^{(1,2\lambda)}(\bar{g})} = O\left(\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{S_i}\right\|_{C^{(0,\lambda)}(l)}\right) = O(f_0). \quad (1.20)$$

把 (1.20) 和 (1.18) 结合起来，我们得到：问题 (II) 有在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(1,1)}$ 类的解 $u(x, t)$，且

$$\|u\|_{B^{(1,1)}(\bar{g})} = O(f_0), \quad (1.21)$$

这里的 O 与解 u 及 f 无关

3. 最后，在齐次边界条件和非齐次初始条件下讨论齐次热传导方程的第二边值问题：

$$\text{(IV)}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, & (x, t) \in g; \quad (1.22)\\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k; \quad (1.23)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{S_i} = 0, & t \in l,\ i = 1, 2; \quad (1.24)\\ \varphi'(\psi_i(0)) = 0, & i' = 1, 2. \quad (1.25)\end{cases}$$

假定 S_i 连续可微，$i = 1, 2$，$\varphi(x)$ 在 k 为 $(1, \lambda)$ 类函数.

这时，不难把 $\varphi(x)$ 拓展到整个实轴上，使拓展后的函数 $\bar{\varphi}(x)$ 在 k 内等于 $\varphi(x)$；在 $|x| \leqslant L$ 内不为零，$(L > \max(|\psi_1(0)|, |\psi_2(0)|))$ 并属于 $(1, \lambda)$ 类，且

$$\|\bar{\varphi}\|_{(1,\lambda)} = O(\|\varphi\|_{(1,\lambda)});$$

同时，在 $|x| \geqslant L$ 时，$\bar{\varphi}(x) \equiv \bar{\varphi}'(x) \equiv 0$[1].

根据第一部分第三章第二节的结果，可以把问题 (IV) 的解写成和的形式

$$u(x,t) = Z(x,t) + p(x,t),$$

其中

$$Z(x,t) = Z(\bar{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t;\xi)\bar{\varphi}(\xi)d\xi$$

是波阿松积分，而 $p(x,t)$ 为下述问题的解

---

1) 我们讨论更一般的函数拓展法.

设 $\varphi(x)$ 是某区间 $k(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$ 上的 $C^{(n,\lambda)}$ 类函数. 我们证明: 可以把 $\varphi(x)$ 光滑地拓展到整个实轴上，使拓展后的函数 $\bar{\varphi}(x)$ 在 k 内等于 $\varphi(x)$, 在 $|x| \geqslant L > \max(|x_1|, |x_2|)$ 时, $\bar{\varphi}(x)$ 及其所有导数恒为零, $\bar{\varphi}(x)$ 在 $|x| \leqslant L$ 上属于 $C^{(n,\lambda)}$ 类，同时，

$$\|\bar{\varphi}\|_{C^{(n,\lambda)}(L)} = O(\|\varphi\|_{C^{(n,\lambda)}(k)}).$$

这时，我们称 $\varphi(x)$ 在 $C^{(n,\lambda)}$ 类内被光滑地拓展到整个实轴上.

实现这种拓展有多种方法，这里仅指出一种常用的方法. 为简便计，假定 $x_2 > 0$, 并只讨论正半轴上的拓展.

n 次多项式

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi_i(x_2)}{i!}(x - x_2)^i, \quad \varphi_i(x_2) = \left.\frac{d^i\varphi(x)}{dx^i}\right|_{x=x_2},$$

能把 $\varphi(x)$ 从 k 右端经 x_2 拓展到右半轴. 为了满足在 $x > L$ 时对 $\bar{\varphi}(x)$ 的要求，只需乘 $p(x)$ 以切削函数 $\theta(x)$, 它在 $x \leqslant x_2$ 时恒为 1, 在 $x \geqslant L$ 时恒为零，在 (x_2, L) 上光滑地取零到 1 间的值，并且，$\theta(x)$ 无限多次可微. 做为这样的函数可取:

$$\theta(x) = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{(x - x_2)^2}{(x - x_2)^2 - (L - x_2)^2}\right], & x_2 \leqslant x \leqslant L, \\ 1, & x < x_2, \\ 0, & x > L. \end{cases}$$

不难看出，

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ p(x)\theta(x), & x \geqslant x_2. \end{cases}$$

这时，$\bar{\varphi}(x)$ 满足了所有的拓展要求.

$$
(\mathrm{V})\begin{cases}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\dfrac{\partial p}{\partial t}, & (x,t)\in g; \quad (1.26)\\ p(x,0)=0, & x\in k; \quad (1.27)\\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial x}\right|_{S_i}=-\left.\dfrac{\partial Z}{\partial x}\right|_{S_i}, & t\in l,\ i=1,2. \quad (1.28)\end{cases}
$$

从第一部分第五章第四节的讨论知,当 $\varphi\in(1,\lambda)$ 时,泊阿松积分 $Z(\bar{\varphi})$ 在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(1,\lambda)}$ 类,且

$$
\|Z\|_{B^{(1,\lambda)}(\bar{g})}=O(\|\bar{\varphi}\|_{(1,\lambda)})=O(\|\varphi\|_{(1,\lambda)}). \qquad (1.29)
$$

由于 S_i 连续可微,故根据第一部分第六章第二节辅助定理,

$$
\left.\frac{\partial Z(\bar{\varphi})}{\partial x}\right|_{S_i}
$$

在 l 内属于 $\left(0,\dfrac{\lambda}{2}\right)$ 类,且

$$
\left\|\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{S_i}\right\|_{(0,\lambda/2)}=O(\|Z\|_{B^{(1,\lambda)}})=O(\|\varphi\|_{(1,\lambda)});
$$

同时,由于

$$
\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x}=Z(\bar{\varphi}'),
$$

所以,从协调条件 (1.25) 推得,当 $t=0$ 时,

$$
\lim_{t\to0}\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{S_i}=\lim_{t\to0}Z(\bar{\varphi}')|_{x=\psi_i(t)}=\bar{\varphi}'(\psi_i(0))=0,
$$

$$
i=1,2;
$$

因此,根据第 1 段中对问题 (I) 的讨论,问题 (V) 在 $\bar{g}$ 内有唯一的属于 $B^{(1,\lambda)}$ 类的解 $p(x,t)$,且

$$
\|p\|_{B^{(1,\lambda)}(\bar{g})}=O\left(\sum_{i=1}^{2}\left\|\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{S_i}\right\|_{(0,\lambda/2)}\right)=O(\|\varphi\|_{(1,\lambda)}). \quad (1.30)
$$

把(1.29) 和 (1.30) 结合起来,我们得出结论: 问题 (IV) 的解 $u(x,t)$ 在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(1,\lambda)}$ 类,且

$$\|u\|_{B^{(1,\lambda)}(\bar{g})} = O(\|\varphi\|_{C^{(1,\lambda)}(k)}). \qquad (1.31)$$

4. 把本节中所有的讨论概括起来,写成下面两个定理.

定理 1 在 g 内讨论第二边值问题:

$$(\text{VI})\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + f(x, t), & (x, t) \in g; \quad (1.32) \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k; \quad (1.33) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{S_i} = \chi_i(t), & t \in l,\ i = 1, 2; \quad (1.34) \\ \chi_i(0) = \varphi'(\psi_i(0)), & i = 1, 2. \quad (1.35) \end{cases}$$

(1.35) 是问题 (VI) 的协调条件.

假定曲线 S_i 属于 $(1, 0)$ 类, $i = 1, 2$, $f(x, t)$ 在 $\bar{g}$ 内连续, 对 x 或 t 满足指数大于零的正则条件, $\varphi(x)$ 在 k 上属于 $(1, \lambda)$ 类, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $\chi_i(t)$ 在 l 上属于 $\left(0, \dfrac{\lambda}{2}\right)$类, $i=1,2$. 这时, 问题 (VI) 有唯一的在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(1,\lambda)}$ 类的解 $u(x, t)$, 且

$$\|u\|_{B^{(1,\lambda)}(\bar{g})} = O\left(f_0 + \sum_{i=1}^{2} \|\chi_i\|_{C^{(0,\frac{\lambda}{2})}(l)} + \|\varphi\|_{C^{(1,\lambda)}(k)} \right), \qquad (1.36)$$

$$f_0 = \max_{(x,t)\in\bar{g}} |f(x, t)|,$$

(1.36) 中的 O 与解 u 及 f, φ 和 χ_i 无关.

当协调条件 (1.35) 不成立时, 估值式 (1.36) 只在区域 $\bar{g}_\delta^T$ 内成立, $\delta > 0$, 此时, (1.36) 右端的 O 还依赖于 δ 的选择.

为了证明定理 1, 首先在 $C^{(1,\lambda)}$ 类内将 $\varphi(x)$ 光滑地拓展到整个实轴,然后使用泊阿松积分 $Z(\varphi(x))$和面热势 $U[-f]$, 把问题 (VI) 化为齐次方程在齐次始值条件下的问题,最后再应用辅助定理和热势论讨论这个问题, 按照本节前三段的讨

论结果，可以验证定理 1 的正确性.

下面，写出有关第一边值问题和第三边值问题的结果.

定理 2 在 g 内讨论第一边值问题:

$$
\text{(VII)}\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}+f(x,t), & (x,t)\in g;\\
u(x,0)=\varphi(x), & x\in k;\\
u|_{S_i}=\eta_i(t), & i=1,2,\ t\in l;\\
\varphi(\psi_i(0))=\eta_i(0), & i=1,2.
\end{cases}
$$

假定 S, f 和 φ 满足本节定理 1 中的条件，$\eta_i\in\left(0,\dfrac{1+\lambda}{2}\right)$，$i=1,2$，则问题 (VII) 有唯一的在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(1,\lambda)}$ 类的解 $u(x,t)$，且

$$
\|u\|_{B^{(1,\lambda)}(\bar{g})}=O\left(f_0+\|\varphi\|_{(1,\lambda)}+\sum_{j=1}^{2}\|\eta_j\|_{\left(0,\frac{1+\lambda}{2}\right)}\right), \quad (1.37)
$$

这里的 O 与 u, f, φ 及 η_i 无关，$i=1,2$.

现讨论第三边值问题:

$$
\text{(VIII)}\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}+f(x,t), & (x,t)\in g;\\
u(x,0)=\varphi(x), & x\in k;\\
\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha_i(t)u\right)\right|_{S_i}=\xi_i(t), & i=1,2,\ t\in l;\\
\varphi'(\psi_i(0))+\alpha_i(0)\varphi(\psi_i(0))=\xi_i(0), & i=1,2.
\end{cases}
$$

如果 $S\in(1,0)$，f 在 $\bar{g}$ 内连续，对 t 或 x 满足指数大于零的正则条件，$\varphi\in(1,\lambda)$，$0\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$，$\xi_i(t)\in\left(0,\dfrac{\lambda}{2}\right)$，$\alpha_i(t)\in\left(0,\dfrac{\lambda}{2}\right)$，$i=1,2$，$\alpha_1\leqslant 0$，$\alpha_2\geqslant 0$，则问题 (VIII) 在 $\bar{g}$ 内有唯一的属于 $B^{(1,\lambda)}$ 类的解 $u(x,t)$，且

$$\|u\|_{B^{(1,\lambda)}(\bar{g})} = O\left(f_0 + \|\varphi\|_{(1,\lambda)} + \sum_{j=1}^{2}\|\xi_j\|_{(0,\lambda/2)}\right), \quad (1.38)$$

(1.38) 中的 O 与 u, f, φ 及 ξ_i 无关, $i=1, 2$.

若问题 (VII) 或问题 (VIII) 的协调条件不成立，则估值式 (1.37) (1.38) 只在区或 g_δ^T 内有效，这时，它们右端的 O 还依赖于 $\delta>0$ 的选择.

第二节　热传导边值问题的光滑解

光滑解指的是在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(n,\lambda)}$ 类的解，$n \geqslant 2$，$0<\lambda \leqslant 1$. 下述定理是本书的中心定理.

定理 3 (中心定理)　在 (x, t) 平面上由两条不相交的曲线 S_i 及两条直线 $t=0$ 和 $t=T$ 所界的曲边梯形区域 g 内讨论下述热传导边值问题:

(I)

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + f(x, t)$, $\quad (x, t) \in g$; (2.1)

b) $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\quad x \in k$; (2.2)

c) $u|_{S_i} = \chi_i(t)$, (第一边值问题) $i=1, 2, t \in l$; (2.3)

或 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha_i(t) u\right)_{S_i} = \chi_i(t)$, (当 $\alpha_i \equiv 0$ 时为第二边值问题；当 $\alpha_i \not\equiv 0$ 时为第三边值问题) $i=1, 2, t \in l$; (2.3′)

这里 S_i 的方程是

$$x = \psi_i(t), \qquad t \in l = [0, T];$$

$\bar{g}$ 是区域,

$$\bar{g}=\{(x,t),\ \psi_1(t)\leqslant x\leqslant \psi_2(t),\ t\in l\}.$$

假定 $f(x,t)$ 在 $\bar{g}$ 内属于 $B^{(n,\lambda)}$ 类，$n\geqslant 0$，$0<\lambda\leqslant 1$，f 及其所有导数在 $(\psi_i(0),0)$ 点取零值，$i=1,2$；$\varphi(x)$ 在 k 内属 $(n+2,\lambda)$ 类.

当 n 为偶数时，对第一边值问题假定：

$$S_i\in\left(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2}\right)\text{类},\qquad i=1,2,$$

$$\chi_i\in\left(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2}\right)\text{类},\qquad i=1,2;$$

对第二和第三边值问题假定：

$$S_i\in\left(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2}\right)\text{类},\qquad i=1,2,$$

$$\chi_i\in\left(\frac{n}{2},\ \frac{1+\lambda}{2}\right)\text{类},\qquad i=1,2,$$

$$\alpha_i\in\left(\frac{n}{2},\ \frac{1+\lambda}{2}\right)\text{类},\qquad i=1,2;$$

当 n 为奇数时，对第一边值问题假定：

$$S_i\in\left(\frac{n+1}{2},\frac{1+\lambda}{2}\right)\text{类},\qquad i=1,2,$$

$$\chi_i\in\left(\frac{n+1}{2},\frac{1+\lambda}{2}\right)\text{类},\qquad i=1,2;$$

对第二和第三边值问题假定：

$$S_i\in\left(\frac{n+1}{2},\frac{1+\lambda}{2}\right)\text{类},\qquad i=1,2,$$

$$\chi_i\in\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{\lambda}{2}\right)\text{类},\qquad i=1,2,$$

$$\alpha_i\in\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{\lambda}{2}\right)\text{类},\qquad i=1,2;\ \alpha_1\leqslant 0,\alpha_2\geqslant 0.$$

此外，我们假定问题 (I) 在 $B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 类中是协调的，即在点 $(\psi_i(0), 0)$ 处成立问题 (I) 的所有的协调条件，$i = 1, 2$，也就是说，当在 $B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 类中讨论问题 (I) 的解 $u(x, t)$ 时，在这两点处，在 f, φ 和 $\chi_i (i = 1, 2)$ 及其有关各阶导数间成立所有必要的协调关系式.

在所有上述条件成立的情况下，问题 (I) 在 $\bar{g}$ 内有唯一的属于 $B^{(n+2,\lambda)}$ 类的解 $u(x,t)$，且它在 $B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 中的模可以用 f, φ 及 χ_i 在所属函数类中的模之和估值.

证明:

这个定理的证明较长，分四部分叙述之.

1) 首先解释一下定理中的协调条件.

讨论下面一个简单的例子. 设 S_i 为直线 $x=x_i$, $i = 1, 2$. 在矩形区域 $g = \{(x, t), x_1 < x < x_2, 0 < t < T\}$ 内讨论第一边值问题:

$$
\text{(II)}\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + f(x, t), & (x, t) \in g; \quad (2.1)\\
u(x, 0) = 0, & x \in k = [x_1, x_2]; \quad (2.4)\\
u|_{x=x_i} = 0, & t \in l, \ i = 1, 2. \quad (2.5)
\end{cases}
$$

这时，如果把解 $u(x, t)$ 视为 $\bar{g}$ 内的 $B^{(2,\lambda)}$ 类函数，那么，$f(x, t)$ 必在 $(x_i, 0)$ 处 $(i = 1, 2)$ 取零值. 这便是问题 (II) 的协调条件. 如果在 $B^{(4,\lambda)}$ 中讨论问题 (II)，那么，其协调条件为

$$
\begin{aligned}
&f(x_i, 0) = 0, \qquad i = 1, 2,\\
&f_{xx}(x_i, 0) + f_t(x_i, 0) = 0, \qquad i = 1, 2;
\end{aligned}
$$

如果在 $B^{(6,\lambda)}$ 中讨论问题 (II)，那么，它的协调条件还应增加

$$
f_{tt}(x_i, 0) + f_{xxt}(x_i, 0) + f_{x^4}(x_i, 0) = 0, \qquad i = 1, 2.
$$

现在讨论下面的第一边值问题:

$$
\text{(III)}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}+f(x,t), & (x,t)\in g; \quad (2.1)\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in k; \quad (2.2)\\ u|_{s_i}=\chi_i(t), & t\in l,\quad i=1,2. \quad (2.6)\end{cases}
$$

如果在 $B^{(2,\lambda)}$ 类中讨论问题 (III) 的解，那么，

$$
\varphi(\psi_i(0))=\chi_i(0), \qquad i=1,2. \qquad (2.7)
$$

同时，可以验证，

$$
\varphi''(\psi_i(0))=\chi_i'(0)-\varphi'(\psi_i(0))\psi_i'(0)+f(\psi_i(0),0);\quad i=1,2. \qquad (2.8)
$$

(2.7)，(2.8) 便是问题 (III) 在 $B^{(2,\lambda)}$ 中的协调条件．当在 $B^{(3,\lambda)}$ 中讨论问题 (III) 时，如果 (2.7) (2.8) 均成立，那么，问题仍然是协调的．

现在讨论第二边值问题：

$$
\text{(IV)}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}+f(x,t), & (x,t)\in g; \quad (2.1)\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in k; \quad (2.2)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{s_i}=\eta_i(t), & t\in l,\ i=1,2. \quad (2.9)\end{cases}
$$

如果在 $B^{(2,\lambda)}$ 中讨论问题(IV)，那么，它的协调条件是：

$$
\varphi'(\psi_i(0))=\eta_i(0), \qquad i=1,2. \qquad (2.10)
$$

问题 (IV) 在 $B^{(3,\lambda)}$ 中的协调条件，除去 (2.10) 外，还应补充下面的协调关系式：

$$
\varphi'''(\psi_i(0))=\eta_i'(0)-\varphi''(\psi_i(0))\psi_i'(0)+f_x(\psi_i(0),0);\quad i=1,2. \qquad (2.11)
$$

不难看出，当 (2.10) 和 (2.11) 成立时，问题 (IV) 在 $B^{(4,\lambda)}$ 类中也是协调的．

从所讨论的这些例子中我们可以看出，由于在闭区域 $\bar{g}$

内讨论问题(I)的光滑解，所以，在($\phi_i(0)$, 0)点，就应在问题的所有已知条件中成立某些关系式，以使得所讨论的问题提得是协调的，有意义的. 这些协调关系式的具体形式，是由所讨论的解的光滑程度及具体的边值情况决定的.

2) 现在证明中心定理. 为书写方便起见，仍把第二边值问题做为典型来讨论:

$$
(\mathrm{V})\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}+f(x,t), & (x,t)\in g; \quad (2.1)\\
u(x,0)=\varphi(x), & x\in k; \quad (2.2)\\
\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{s_i}=\eta_i(t), & i=1,2,\ t\in l. \quad (2.12)
\end{cases}
$$

假定问题(V)在 $B^{(n+2,\lambda)}$ 类中是协调的.

首先，把问题(V)归结为在齐次初始条件下的齐次方程的问题. 为此，将 $\varphi(x)$ 在 $C^{(n+2,\lambda)}$ 类光滑地拓展到整个实轴，拓展后的函数不妨仍记为 $\varphi(x)$. 这时，泊阿松积分

$$
Z(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t;\xi)\varphi(\xi)d\xi
$$

为 $\bar{g}$ 内的 $B^{(n+2,\lambda)}$ 类函数，且

$$
\|Z\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})}=O(\|\varphi\|_{C^{(n+2,\lambda)}(k)}). \qquad (2.13)
$$

根据第一部分第五章第三节中面热势的基本定理，面热势 $U[-f]$ 为 $\bar{g}$ 内的 $B^{(n+2,\lambda)}$ 类函数，同时，

$$
\|U\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})}=O(\|f\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g})}). \qquad (2.14)
$$

设
$$
u=y+Z+U,
$$

则 y 为下述问题的解:

$$
(\mathrm{VI})\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{\partial y}{\partial t}, & (x,t)\in g; \quad (2.15)\\
y(x,0)=0, & x\in k; \quad (2.16)\\
\left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{s_i}=\eta_i(t)-\left.\dfrac{\partial Z}{\partial x}\right|_{s_i}-\left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{s_i}
\end{cases}
$$

$$= \eta_i(t) - \bar{\eta}_i(t) - \tilde{\eta}_i(t) = \chi_i(t),$$

$$i = 1, 2, t \in l. \quad (2.17)$$

依第一部分第六章第二节辅助定理，由于

$$Z \in B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g}), \qquad U \in B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g}),$$

所以，当 n 为偶数时，$\chi_i \in \left(\frac{n}{2}, \frac{1+\lambda}{2}\right)$，且

$$\|\chi_i\|_{\left(\frac{n}{2}, \frac{1+\lambda}{2}\right)} = O(\|\eta_i\|_{\left(\frac{n}{2}, \frac{1+\lambda}{2}\right)} + \|Z\|_{B^{(n+2,\lambda)}}$$

$$+ \|U\|_{B^{(n+2,\lambda)}}), \quad (2.18)$$

当 n 为奇数时，$\chi_i \in \left(\frac{n+1}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$，且

$$\|\psi_i\|_{\left(\frac{n+1}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)} = O(\|\eta_i\|_{\left(\frac{n+1}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)} + \|Z\|_{B^{(n+2,\lambda)}}$$

$$+ \|U\|_{B^{(n+2,\lambda)}}). \quad (2.19)$$

3) 现在证明，当 $t = 0$ 时，$\chi_i(t)$ 及其所有导数均取零值，$i = 1, 2$.

显而易见，根据复合函数微分法则及前部分第五章第三节中面热势的基本定理，$\bar{\eta}_i(t)$ 及其所有导数在 $t = 0$ 时均取零值.

现在说明，由于问题 (V) 在 $B^{(n+2,\lambda)}$ 中是协调的，所以，当 $t = 0$ 时，差函数

$$\eta_i(t) - \bar{\eta}_i(t)$$

及其所有导数均取零值.

事实上，在第一部分第五章第四节曾指出

$$\frac{\partial^n Z[\varphi]}{\partial x^n} = Z\left[\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}\right] = Z[\varphi^{(n)}],$$

因此，

$$\bar{\eta}_i(t) = \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{s_i} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi)\varphi(\xi)d\xi\right]\Bigg|_{x=\phi_i(t)}$$

$$= Z[\varphi']_{s_i}.$$

由于当 $t\to 0$ 时，

$$Z[\varphi']\to\varphi'(x),$$

所以，

$$\bar{\eta}_i(0)=\varphi'(\psi_i(0)). \tag{2.20}$$

现在设法计算 $\bar{\eta}_i'(t)$ 在 $t=0$ 的值. 显然，

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\eta}_i(t)}{dt}&=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial Z}{\partial x}\bigg|_{s_i}\right]=\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t;\xi)\big|_{x=\psi_i(t)}\varphi'(\xi)d\xi\right]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial G(x,t;\xi)}{\partial x}\bigg|_{x=\psi_i(t)}\cdot\psi_i'(t)\varphi'(\xi)d\xi\\&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial G(x,t;\xi)}{\partial t}\bigg|_{x=\psi_i(t)}\varphi'(\xi)d\xi\\&=\psi_i'(t)Z[\varphi'']|_{s_i}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2G(x,t;\xi)}{\partial x^2}\bigg|_{x=\psi_i(t)}\varphi'(\xi)d\xi\\&=\psi_i'(t)Z[\varphi'']|_{s_i}+Z[\varphi''']|_{s_i},\end{aligned}$$

因此，

$$\bar{\eta}_i'(0)=\psi_i'(0)\varphi''(\psi_i(0))+\varphi'''(\psi_i(0)). \tag{2.21}$$

类似地可以计算 $\bar{\eta}_i(t)$ 的任何阶导数.

当 $n=0$ 时，根据中心定理假设，$\bar{\eta}_i(t)$ 与 $\eta_i(t)$ 均为 $\left(0,\frac{1+\lambda}{2}\right)$ 类函数. 把协调条件 (2.10) 与计算结果 (2.20) 相比较，我们看到，当 $t=0$ 时，

$$\eta_i(0)-\bar{\eta}_i(0)=0.$$

当 $n=1$ 时，$\eta_i(t)$ 与 $\bar{\eta}_i(t)$ 均为 $\left(1,\frac{\lambda}{2}\right)$ 类函数. 这时，把协调条件 (2.11) 与计算结果 (2.21) 相比较，并考虑到中心定理关于 f 的假定，我们看到，差

$$\eta_i(t)-\bar{\eta}_i(t)$$

及其导数在 $t=0$ 时均取零值，$i=1,2$.

当 $n=2$ 时，η_i 与 $\bar{\eta}_i$ 均为 $\left(1,\frac{1+\lambda}{2}\right)$ 类函数，它们仍只

有一阶导数. 这时，如果问题（V）在 $B^{(3,\lambda)}$ 中是协调的，那么,协调关系式（2.10）及（2.11）就成立,因而,

$$\eta_i(t)-\bar{\eta}_i(t)$$

及其导数在 $t=0$ 时仍取零值，$i=1, 2$.

从以上讨论过程中不难看出,对于任何 n，只要我们写出具体的协调关系式，并计算出 $\bar{\eta}_i(t)$ 的导数在 $t=0$ 时的值，那么,总可以证明: $\bar{\eta}_i(t)-\eta_i(t)$ 及其所有导数在零点取零值，$i=1, 2$.

这样,我们证明了,由于中心定理关于 f 的假定和问题的协调性，函数 $\chi_i(t)$ 及其所有导数在零点均取零值. 这就给我们在讨论问题（VI）时使用前部分第六章第一节定理 4 和定理 5 奠定了基础.

4） 最后，研究问题（VI）. 和在本章第一节第 1 段中一样,它的解可写为两个单层热势之和:

$$y(x, t)=V^1[\mu_1]+V^2[\mu_2],$$

其中 V^i 是分布在曲线 S_i 上的热势，$i=1, 2$，而密度 $\mu_i(t)$ 满足积分方程组（1.6）.

以后的讨论是逐字逐句地重复本章第一节中第 1 段的文字,这里就不赘述了. 我们指出，为证完中心定理，除去在前段的结果的基础上反复对（1.6）中的 $V^i_{xst}[\mu_i]$ 使用上一部分第六章第一节中定理 4 和定理 5 外，还要使用辅助定理及前一部分第五章第二节中的曲线热势的基本定理,因此，当 n 有不同的奇偶性时，对曲线 S_i 及边界函数提出了不同的光滑性要求.

于是,我们可以得到下述结论: 问题（VI）有 $\bar{g}$ 内有唯一的属于 $B^{(n+2,\lambda)}$ 类的解 $y(x, t)$，且

$$\|y\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})}=O\left(\sum_{i=1}^{2}\|\chi_i\|\right). \tag{2.22}$$

考虑到 (2.22), (2.18), (2.19) 及 (2.13), (2.14), 我们最终证明了: 问题 (V) 在 $\bar{g}$ 内有唯一的属于 $B^{(n+2,\lambda)}$ 类的解 $u(x, t)$, 且

$$\|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})} = O\Big(\|f\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g})} + \|\varphi\|_{C^{(n+1,\lambda)}(k)} + \sum_{i=1}^{2}\|\eta_i\|\Big), \tag{2.23}$$

上式中的 O 只依赖于常数 T 和曲线 $S_i(i=1, 2)$, 而与解 u 及 f, φ 和 η_i 无关, η_i 所在的函数类由定理 3 的条件决定.

表 4 热传导边值问题解的光滑性

<table>
<tr><th>$f(x, t)$</th><th>$\varphi(x)$</th><th colspan="2">S_i $i=1, 2$</th><th>$_i(t)$(及 $\alpha_i(t)$) $i=1,2$</th><th>$u(x, t)$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$(0, 0, \gamma, 0)$
或
$(0, 0, 0, \gamma)$
$0<\gamma\leq 1$</td><td rowspan="2">$(1, \lambda)$</td><td colspan="2" rowspan="2">$(1, 0)$</td><td>第一边值问题
$\left(0, \frac{1+\lambda}{2}\right)$</td><td rowspan="2">$B^{(1,\lambda)}$</td></tr>
<tr><td>第二、三边值问题
$\left(0, \frac{\lambda}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$B^{(n,\lambda)}$
$n\geq 0$
$0<\lambda\leq 1$</td><td rowspan="4">$(n+2, \lambda)$</td><td rowspan="2">n 为偶数</td><td rowspan="2">$\left(\frac{n}{2}+1, \frac{\lambda}{2}\right)$</td><td>第一边值问题
$\left(\frac{n}{2}+1, \frac{\lambda}{2}\right)$</td><td rowspan="4">$B^{(n+2,\lambda)}$</td></tr>
<tr><td>第二、三边值问题
$\left(\frac{n}{2}, \frac{1+\lambda}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">n 为奇数</td><td rowspan="2">$\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1+\lambda}{2}\right)$</td><td>第一边值问题
$\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1+\lambda}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>第二、三边值问题
$\left(\frac{n+1}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$</td></tr>
</table>

把本章中所有的结果综合起来，我们将在 $B^{(m,\lambda)}$ 类中协调的各种边值问题的解的光滑性与初始条件，边界条件、函数 f 及曲线 S_i 的光滑性之间的关系列表总结出来. 在表中，解 $u(x,t)$ 在 $\bar{g}$ 中的 $B^{(m,\lambda)}$ 函数类中的模可以用 f、φ 及 χ_i 在相应的函数类中的模之和估值，这种估值通常统称为 **B 估值**.

注 1 现在证明，当条件"f 及其所有导数在 $(\psi_i(0), 0)$ $(i=1,2)$ 处取零值"不成立，而成立中心定理的所有其它条件时，中心定理依然有效.

我们以本节中第一边值问题 (I) [见 (2.1)、(2.2) 和 (2.3)] 做为例子进行讨论.

首先，讨论 $n=2$ 的情形. 假设 $f(x_i,0)=f_i\neq 0$，$x_i=\psi_i(0)$，$i=1,2$. 此外，中心定理的其它条件均成立.

做函数

$$F(x)=ax+b,$$

$$a=\frac{f_1-f_2}{x_1-x_2},\qquad b=\frac{x_1f_2-x_2f_1}{x_1-x_2};$$

不难验证，

$$F(x_i)=f_i,\qquad i=1,2.$$

令

$$\tilde{f}(x,t)=f(x,t)-F(x),$$

则

$$\tilde{f}(x_i,0)=0,\qquad i=1,2;$$

另一方面，显然，当

$$Q(x,t)=\frac{a}{6}x^3-bt$$

时，则

$$LQ=\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}-\frac{\partial Q}{\partial t}=F(x).$$

因此，若设 $V = u - Q$，则可代替第一边值问题 (I) 讨论下述第一边值问题：

$$
(*)\begin{cases}
Lv = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v}{\partial t} = \bar{f}(x, t), & (x, t) \in g; \\
v(x, 0) = \varphi(x) - \dfrac{a}{6}x^3 = \bar{\varphi}(x), & x \in k; \\
v|_{s_i} = \chi_i(t) - \dfrac{a}{6}[\psi_i(t)]^3 + bt = \bar{\chi}_i(t), & \\
& t \in l, i = 1, 2;
\end{cases}
$$

不难看出，问题 (*) 满足中心定理中所有的条件，因此，它有唯一的属于 $B^{(2,\lambda)}(\bar{g})$ 的解 $v(x,t)$，并且，

$$\|v\| = O(\|\bar{f}\| + \|\bar{\varphi}\| + \|\bar{\chi}_i\|),$$

(上式中诸模数依被取模函数所属函数类决定)但是，

$$\|u\| \leqslant \|v\| + \|Q\| = O(\|v\| + \|f\|),$$

$$\|\bar{f}\| \leqslant \|f\| + \|F\| = O(\|f\|),$$

$$\|\bar{\varphi}\| = O(\|\varphi\| + \|f\|),$$

$$\|\bar{\chi}_i\| = O(\|\chi_i\| + \|f\|);$$

所以，问题 (I) 有属于 $B^{(2,\lambda)}(\bar{g})$ 的解

$$u = v + Q,$$

同时，

$$\|u\|_{B^{(2,\lambda)}} = O(\|f\| + \|\varphi\| + \|\chi_i\|).$$

由此可见，当 $n = 2$ 时，若 $f(x_i, 0) \neq 0$，而成立中心定理的所有其它条件，那么，中心定理依然有效.

当 $n = 3$ 时，可对 $v = u_x$ 应用上述 $n = 2$ 时的结论；另一方面，由于 u 满足 (2.1) 和 $f \in B^{(1,\lambda)}$ 类，所以，u_t 亦属 $B^{(1,\lambda)}$ 类. 这时，根据 $B^{(3,\lambda)}$ 类定义得出：当 $n = 3$ 时、若 f 或其某阶导数在 $(x_i, 0)$ 处不取零值，而成立中心定理其它条件，则中心定理仍成立.

此后,应用数学归纳法和 $B^{(n,\lambda)}$ 类定义,不难证明,对于任何 $n \geqslant 2$,若条件"f 及其所有导数在 $(x_l, 0)$ 点取零值"不成立,但成立中心定理的其它条件,那么,中心定理依然正确.

注 2 除去第一、二、三边值问题外,还可讨论混合边值问题: 在这类问题中,在 g 的一个侧边上给出的是一种类型的边界条件,在另一个侧边上,是另一种类型的边界条件. 对于混合边值问题,中心定理仍然成立.

注 3 B 估值给出了各种边值问题在 $B^{(m,\lambda)}(m \geqslant 1, 0 < \lambda \leqslant 1)$ 意义下的适定性.

注 4 当讨论第一边值问题时,可使用双层热势;在讨论第三边值问题时,仍宜使用单层热势.

应该指出,当使用双层热势讨论第一边值问题时,导致对曲线 S_i 的光滑性不自然的过高的要求(要比中心定理规定的高半阶). 为了克服这个弊病,我们运用下面的技巧,仍借助单层热势来讨论第一边值问题. 我们这里只简要介绍这个方法的要领,而不让那些大量的繁杂的计算再占用篇幅了.

把第一边值问题

$$
\text{(VII)}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \qquad (x, t) \in g; & (2.24)\\ u(x, 0) = 0, \qquad x \in k; & (2.25)\\ u|_{S_i} = \eta_i(t), \qquad t \in l,\ i = 1, 2; & (2.26)\end{cases}
$$

的解写成两个单层热势之和:

$$
u(x, t) = V^1[\mu_1] + V^2[\mu_2]. \tag{2.27}
$$

为满足条件(2.26),得到下面的第一类沃尔泰拉积分方程组:

$$
\begin{cases}\eta_1(t) = V_{st}^1[\mu_1] + \bar{V}^2[\mu_2], & (2.28)\\ \eta_2(t) = V_{st}^2[\mu_2] + \bar{V}^1[\mu_1], & (2.29)\end{cases}
$$

这里 $V^i_{si}[\mu_i]$ 表示单层热势 $V^i[\mu_i]$ 在曲线 S_i 上的直接值，$\overline{V}^i[\mu_i]$ 是热势 $V^i[\mu_i]$ 在曲线 S_j 上的值；$i=1, 2$；$i=1$ 时，$j=2$；$i=2$ 时，$j=1$.

采用下述办法将 (2.28) (2.29) 化归第二类沃尔泰拉方程组：把 (2.28) (2.29) 两端均乘以

$$\frac{1}{\sqrt{y-t}},$$

并对 t 从 0 积分到 y，这时有：

$$\chi_1(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{2}\int_0^y \mu_j(\tau)K_{1j}(\tau, y)d\tau, \qquad (2.30)$$

$$\chi_2(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{2}\int_0^y \mu_j(\tau)K_{2j}(\tau, y)d\tau, \qquad (2.31)$$

其中

$$\chi_i(y)=\int_0^y \frac{\eta_i(t)}{\sqrt{y-t}}\,dt,$$

$$K_{ij}(\tau, y)=\int_\tau^y \frac{1}{\sqrt{(y-t)(t-\tau)}}e^{-\frac{[\psi_j(\tau)-\psi_j(t)]^2}{4(t-\tau)}}\,dt.$$

把 (2.30) 和 (2.31) 对 y 微分，我们得到

$$\chi_1'(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mu_1(y)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{2}\int_0^y \mu_j(\tau)\times\frac{\partial K_{1j}(\tau, y)}{\partial y}\,d\tau, \qquad (2.32)$$

$$\chi_2'(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mu_2(y)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{2}\int_0^y \mu_j(\tau)\times\frac{\partial K_{2j}(\tau, y)}{\partial y}\,d\tau. \qquad (2.33)$$

可以证明，χ_i 比 η_i 的光滑度高半阶；同时，还可以证

明，下面的日伏列积分

$$\int_0^y \mu_j(\tau)\frac{\partial K_{ij}(\tau, y)}{\partial y}d\tau$$

和曲线热势直接值一样具有增滑作用.这样，从方程组(2.32)(2.33)可以看出，(2.27)的密度的光滑性比 $\eta_i(t)$ 低半阶，所以，应用前部分第五章中关于曲线热势的基本定理，就可以证明中心定理中关于第一边值问题的结果.

注 5 在热势论中，**热势直接值的增滑作用**具有特殊的意义，它**把热势论几个分支有机地联系在一起**. 在第一部分第六章中，借助增滑作用，我们解决了热势论的一个逆问题；在本章中，有效地应用增滑作用定理，得到了热传导边值问题的光滑解；现在，我们说明，由于直接值有增滑作用，可以从 B 估值推得曲线热势的基本定理.

不妨只讨论单层热势. 设单层热势 $V[\mu]$ 的密度 $\mu(t)$ 在 $l=[0, T]$ 上属于 (n,λ) 类，$n\geqslant 1$ 为偶数，$0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$，并且，$\mu(t)$ 及其所有导数在 $t=0$ 时取零值，同时，单层热势 $V[\mu]$ 的分布曲线 S 由方程

$$x=\psi(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

确定，并且，$S\in(n, \lambda)$.

这时，依据上一部分第二章基本公式(2.6)，可以把 $V[\mu]$ 视为下述第二边值问题的解：

$$(\mathrm{VIII})\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}, & (x, t)\in g;\\ u(x, 0)=0, & x\in k;\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_S=\dfrac{-1}{2}\mu(t)+V_{xst}(t)=\chi(t), & t\in l;\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_S=V_x|_S=\overline{\chi}(t), & t\in l;\end{cases}$$

这里的 $\bar{S}$ 是直线

$$x = x_0 > \max_t \psi(t),$$

g 是夹于二直线 $t=0$ 和 $t=T$ 间由 S 和 $\bar{S}$ 所界的区域.

显然, $\bar{\chi}(t)$ 在 l 上属于 $\left(n-1, \lambda+\frac{1}{2}\right)$ 类,且

$$\|\bar{\chi}\|_{(n-1,\lambda+\frac{1}{2})} = O(\|\mu\|_{(n,\lambda)});$$

另一方面,根据曲线热势直接值增滑作用定理,在 l 上

$$\chi(t) \in \left(n-1, \lambda'+\frac{1}{2}\right),$$

且

$$\|\chi\|_{(n-1,\lambda'+\frac{1}{2})} = O(\|\mu\|_{(n,\lambda)}),$$

这里,当 $\lambda < \frac{1}{2}$ 时, $\lambda' = \lambda$; 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $\lambda' < \frac{1}{2}$ 是任意的.

不难看出,当 $t=0$ 时, $\chi(t)$、$\bar{\chi}(t)$ 及其所有导数均取零值,因而,问题 (VIII) 在 $B^{(2n,2\lambda)}$ 中是协调的.

这时,由本章 B 估值中心定理推出,在 g 内,问题 (VIII) 的解

$$V[\mu] \in B^{(2n,2\lambda)},$$

同时,

$$\|V\|_{B^{(2n,2\lambda)}(\bar{g})} = O(\|\chi\|_{(n-1,\lambda'+\frac{1}{2})}) + O(\|\bar{\chi}\|_{(n-1,\lambda+\frac{1}{2})}) = O(\|\mu\|_{(n,\lambda)}). \tag{2.34}$$

由于直线 $\bar{S}$ 是任取的,故当 $x_0 \to \infty$ 时, (2.34) 仍成立,这便是曲线热势基本定理第一个论断中关于单层热势的结果.

完全类似地可以讨论 n 为奇数及 $1/2 < \lambda \leqslant 1$ 的情形.同样讨论双层热势的情形.

第二章 先验估值

第一节 $C^{(n,\lambda)}$ 和 $B^{(n,\lambda)}$ 空间

不熟悉泛函分析的读者，可先阅读附录二，然后再阅读本节.

§1 $C^{(n,\lambda)}$ 空间

1） 线性赋范空间 $C^{(n,\lambda)}$

区间 $[0\leqslant x\leqslant T]$ 上所有属于 $C^{(n,\lambda)}[0, T]$ 类的函数集合用 $C^{(n,\lambda)}$ 表示之. $C^{(n,\lambda)}$ 的元素 $f=f(x)$ 是 $[0, T]$ 上的 $C^{(n,\lambda)}$ 类函数 $(n\geqslant 0,\ 0<\lambda\leqslant 1)$. $C^{(n,\lambda)}$ 中的元素相加定义为通常的函数之和，其元素的数乘定义为通常的函数数乘. 这样，不难看出，$C^{(n,\lambda)}$ 为一线性空间，其零元素即是常数 0.

设 $f\in C^{(n,\lambda)}$，即 $f(x)\in C^{(n,\lambda)}[0, T]$，并记

$$f_0=\max_{0\leqslant x\leqslant T}|f(x)|,$$

$$f_{n,\lambda}=\sup_{\substack{0\leqslant x_1\leqslant T\\ 0\leqslant x_2\leqslant T}}\frac{\left|\dfrac{d^nf(x_1)}{dx^n}-\dfrac{d^nf(x_2)}{dx^n}\right|}{|x_1-x_2|^\lambda}.$$

定义 $C^{(n,\lambda)}$ 中元素 f 的范数(模)为

$$\|f\|=\|f\|_{C^{(n,\lambda)}}=f_0+f_{n,\lambda}. \tag{1.1}$$

容易验证，(1.1) 满足模的三个条件. 因此，$C^{(n,\lambda)}$ 为一线性赋范空间.

2） $C^{(n,\lambda)}$ 中的等价范数

设 f 为线性空间 $C^{(n,\lambda)}$ 中的元素，记

$$f_k = \max_{0 \le x \le T} \left| \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|; \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n;$$

$$f_{k,\lambda} = \sup_{\substack{0 \le x_1 \le T \\ 0 \le x_2 \le T}} \frac{\left| \dfrac{d^k f(x_1)}{dx^k} - \dfrac{d^k f(x_2)}{dx^k} \right|}{|x_1 - x_2|^\lambda}, \quad k=0, 1, 2, \cdots, n.$$

我们证明

$$\|f\|_A = f_0 + f_{n,\lambda} \tag{1.2}$$

和

$$\|f\|_B = \sum_{k=0}^{n} (f_k + f_{k,\lambda}) \tag{1.3}$$

是 $C^{(n,\lambda)}$ 中两个等价的范数． 这个证明较长，我们分五段叙述之．

在证明中，将对 $C^{(n,\lambda)}$ 类函数建立一系列的内插估值：

$$f_k = O(f_0 + f_{n,\lambda}), \tag{1.4}$$

$$f_{k,\lambda} = O(f_0 + f_{n,\lambda}), \tag{1.5}$$

其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, n$，$0 < \lambda \le 1$，并且，(1.4)及(1.5)右端的 O 与 f 无关．由此，立刻可以推出 (1.2) 和 (1.3)的等价性．

为了在下一章中应用方便起见，我们还将把内插估值 (1.4) 和 (1.5) 写成**带参数的内插估值**：

$$f_k = O(\varepsilon f_{n,\lambda} + L_k f_0), \qquad k = 0, 1, \cdots, n; \tag{1.6}$$

$$f_{k,\lambda} = O(\varepsilon f_{n,\lambda} + \bar{L}_k f_0), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1; \tag{1.7}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为任意参数，L_k，$\bar{L}_k$ 仅与 ε 有关，(1.6) 和 (1.7) 右端的 O 与 f 和 ε 均无关．

(I) 荷尔德不等式

$$令\ q>1,\ q'=\frac{q}{q-1},$$

则对任何 $x,\ y\geqslant 0$，不等式

$$xy\leqslant\frac{x^q}{q}+\frac{y^{q'}}{q'} \tag{1.8}$$

成立．为今后应用方便起见，有时，还可在 (1.8) 中写入参数 $\varepsilon>0$：

$$xy=(\varepsilon x)\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\leqslant\frac{\varepsilon^q}{q}x^q+\frac{1}{q'\varepsilon^{q'}}y^{q'}. \tag{1.9}$$

它对任何 $x,\ y\geqslant 0$均成立．

(II) $f\in C^{(1)}$的情形．

现设$f(x)\in C^{(1)}(T)$，$T=[0,T]$，则有

$$f_{0,\lambda}=O(\varepsilon f_1+\bar{N}_0 f_0),\qquad 0<\lambda<1. \tag{1.10}$$

证明．

不妨令 $f\not\equiv$ 常数．以 ω 表示 f 在 T 上的振幅，则有

$$\omega=\max_T|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant Tf_1,$$

其中 x_1 和 x_2 为区间 T 中任意两点．因此，

$$T_1=\frac{\omega}{f_1}\leqslant T.$$

这时，

$$I=\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|^\lambda}\leqslant$$

$$\begin{cases}f_1(T_1)^{1-\lambda}=(f_1)^\lambda\omega^{1-\lambda}, & |x_1-x_2|\leqslant T_1;\\ \omega(T_1)^{-\lambda}=\omega^{1-\lambda}(f_1)^\lambda, & |x_1-x_2|\geqslant T_1.\end{cases}$$

所以，

$$I\leqslant\omega^{1-\lambda}(f_1)^\lambda\leqslant 2^{1-\lambda}(f_0)^{1-\lambda}(f_1)^\lambda=2^{1-\lambda}(\varepsilon f_1)^\lambda(\varepsilon^{-\lambda/(1-\lambda)}f_0)^{1-\lambda}.$$

应用不等式 (1.8) 后得到

$$I\leqslant 2^{1-\lambda}\left\{\frac{1}{q}\varepsilon f_1+\frac{1}{q'}\left(\varepsilon^{\frac{-\lambda}{1-\lambda}}f_0\right)\right\}.$$

由此推得 (1.10).

(III) $f \in C^{(1,\lambda)}$ 的情形.

现设 $f(x) \in C^{(1,\lambda)}(T)$, $0 < \lambda \leqslant 1$. 此时,

$$f_1 = O(\varepsilon f_{1,\lambda} + L_1 f_0). \tag{1.11}$$

证明.

不妨令

$$f'(x_0) = \max_{x \in T} |f'(x)| > 0.$$

对任何 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| \leqslant \delta$ 时,有

$$|f'(x_0) - f'(x)| \leqslant \delta^\lambda f_{1,\lambda}. \tag{1.12}$$

此时,无论 $f'(x)$ 的符号如何,不等式

$$f'(x_0) \leqslant f'(x) + \delta^\lambda f_{1,\lambda} \tag{1.13}$$

对区间 $|x - x_0| \leqslant \delta$ 中所有的 x 均成立.

考虑比值

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 + \delta)}{\delta} = f'(x'). \tag{1.14}$$

显然,此时,

$$|x' - x_0| \leqslant \delta,$$

因此,根据 (1.13) 可写

$$\begin{aligned} f_1 = f'(x_0) &\leqslant \delta^\lambda f_{1,\lambda} + f'(x') \\ &= \delta^\lambda f_{1,\lambda} + \frac{f(x_0) - f(x_0 + \delta)}{\delta} \leqslant \delta^\lambda f_{1,\lambda} + \frac{2f_0}{\delta}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

现取 $\delta = \delta_0 = \left(\frac{f_0}{f_{1,\lambda}}\right)^{\frac{1}{1+\lambda}}$,则由 (1.15) 推出

$$f_1 \leqslant 3(f_0)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}(f_{1,\lambda})^{\frac{1}{1+\lambda}} = 3(\varepsilon f_{1,\lambda})^{\frac{1}{1+\lambda}}(\varepsilon^{-1/\lambda} f_0)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}. \tag{1.16}$$

再取

$$q = 1 + \lambda,\ q' = \frac{1+\lambda}{\lambda},$$

而应用 (1.8) 于 (1.16)，则得

$$f_1 = O(\varepsilon f_{1,\lambda} + L_1 f_0).$$

(IV) $f \in C^{(n)}$ 的情形.

现设 $f(x) \in C^{(n)}(T)$，$n \geqslant 1$. 这时，

$$f_k = O[(f_n)^{\frac{k}{n}}(f_0)^{\frac{n-k}{n}}], \qquad k = 0, 1, \cdots, n; \quad (1.17)$$

$$f_{k,\lambda} = O[(f_n)^{\frac{k+\lambda}{n}}(f_0)^{\frac{n-k-\lambda}{n}}],\ k = 0, 1, \cdots, n-1,$$
$$0 < \lambda \leqslant 1. \quad (1.18)$$

证明.

我们用归纳法证明这两个估值.

从第 (III) 段的讨论可以看出，当 $n=2$, $k=1$ 时，(1.17) 成立.

现假定 (1.17) 在 $n = p$, $k < p$ 时成立，而证明它在 $n = p + 1$, $k < p + 1$ 时亦成立.

当 $n = p$, $k = p - 1$ 时，(1.17) 可写为

$$f_{p-1} = O[(f_p)^{\frac{p-1}{p}}(f_0)^{\frac{1}{p}}]. \quad (1.19)$$

当 $f(x) \in C^{(p+1)}(T)$ 时，$F(x) = \dfrac{d^{p-1}f(x)}{dx^{p-1}} \in C^{(2)}(T)$. 因之，根据 $n = 2$, $k = 1$ 时的 (1.17) 式可写为

$$F_1 = O[(F_0)^{\frac{1}{2}}(F_2)^{\frac{1}{2}}],$$

将 (1.19) 代入上式，有

$$f_p = O[(f_{p+1})^{\frac{1}{2}}(f_p)^{\frac{p-1}{2p}}(f_0)^{\frac{1}{2p}}], \quad (1.20)$$

在 (1.20) 右端应用不等式 (2.9)，得

$$f_p \leqslant C_1\left\{\frac{\varepsilon^q}{q} f_p + \frac{1}{q'\varepsilon^{q'}}\left[(f_{p+1})^{\frac{1}{2}}(f_0)^{\frac{1}{2p}}\right]^{\frac{2p}{p+1}}\right\}.$$

再取 ε 充分小，以至

$$\frac{C_1\varepsilon^q}{q}\leqslant\frac{1}{2},$$

则有

$$f_p=O[[(f_{p+1})^{\frac{1}{2}}(f_0)^{\frac{1}{2p}}]^{\frac{2p}{p+1}}]=O[(f_{p+1})^{\frac{p}{p+1}}(f_0)^{\frac{1}{p+1}}],\quad(1.21)$$

由此证明 (1.17) 在 $n=p+1$、$k=p$ 时亦正确.

根据归纳假设,当 $n=p$、$k<p$ 时 (1.17) 成立,即

$$f_k=O[(f_p)^{\frac{k}{p}}(f_0)^{\frac{n-k}{p}}].$$

将 (1.21) 代入上式后,得到

$$f_k=O\{[(f_{p+1})^{\frac{p}{p+1}}(f_0)^{\frac{1}{p+1}}]^{\frac{k}{p}}(f_0)^{\frac{p-k}{p}}\}$$
$$=O[(f_{p+1})^{\frac{k}{p+1}}(f_0)^{\frac{p+1-k}{p+1}}],$$

即 (1.17) 在 $n=p+1$, $k<p$ 时均成立. 因之,它对任何 $k<n$ 均成立. 当 $k=n$ 时, (1.17) 自然成立.

现在证明 (1.18).

根据第 (II) 段的讨论,可写

$$f_{k,\lambda}=O[(f_{k+1})^{\lambda}(f_k)^{1-\lambda}].$$

将 (1.17) 代入上式后,即可得证 (1.18).

利用不等式 (1.8), 还可将 (1.17) 和 (1.18) 改写为带有任意参数的内插估值:

$$f_k=O(\varepsilon f_n+N_kf_0),\qquad k<n;\qquad(1.22)$$
$$f_{k,\lambda}=O(\varepsilon f_n+\bar{N}_kf_0),\qquad k<n;\qquad(1.23)$$
$$k<n-1\text{ 时},\qquad 0<\lambda\leqslant1;$$
$$k=n-1\text{ 时},\qquad 0<\lambda<1.$$

(V) $f\in C^{(n,\lambda)}$的情形.

最后,假设 $f(x)\in C^{(n,\lambda)}(T)$, $n\geqslant0$, $0<\lambda\leqslant1$. 这时,

$$f_k=O(\varepsilon f_{n,\lambda}+L_kf_0),\quad k=0,1,\cdots,n;\qquad(1.24)$$
$$f_{k,\lambda}=O(\varepsilon f_{n,\lambda}+\bar{L}_kf_0),\quad k=0,1,\cdots,n-1;\qquad(1.25)$$

证明.

根据(1.16)，可写

$$f_n = O[(f_{n,\lambda})^{\frac{1}{1+\lambda}}(f_{n-1})^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}].$$

将 $k=n-1$ 时的(1.17)式代入上式后，得到

$$f_n = O(f_{n,\lambda}^{\frac{1}{1+\lambda}}\ [(f_n)^{\frac{n-1}{n}}(f_0)^{\frac{1}{n}}]^{\frac{\lambda}{1+\lambda}})$$

$$= O\{(f_n)^{\frac{\lambda(n-1)}{n(1+\lambda)}}(f_{n,\lambda})^{\frac{1}{1+\lambda}}(f_0)^{\frac{\lambda}{n(1+\lambda)}}\},$$

再应用(1.9)式可得

$$f_n \leqslant C_2\left\{\frac{\varepsilon^q}{q} f_n + \frac{1}{q'\varepsilon^{q'}}[(f_{n,\lambda})^{\frac{n}{n+\lambda}}(f_0)^{\frac{\lambda}{n+\lambda}}]\right\},$$

取 ε 足够小，使得

$$\frac{C_2\varepsilon^q}{q} \leqslant \frac{1}{2},$$

则可写

$$f_n = O[(f_{n,\lambda})^{\frac{n}{n+\lambda}}(f_0)^{\frac{\lambda}{n+\lambda}}]. \tag{1.26}$$

由此，再次引入参数 ε，并应用不等式(1.8)，即可得到 $k=n$ 时的估值(1.24)。

为了验证这个估值在 $k<n$ 时的正确性，只需将(1.26)代入(1.17)中。

把(1.26)代入(1.18)后，即可验证(1.25)的正确性。

3) $C^{(n,\lambda)}$空间的完备性

现在，我们证明 $C^{(n,\lambda)}$ 空间的完备性。

设 $f_m=f_m(x)$ 为 $C^{(n,\lambda)}$ 空间中一基本序列，即对任给 $\varepsilon>0$，有 N 存在，使当 $m, m'>N$ 时，

$$\|f_m - f_{m'}\|_{C^{(n,\lambda)}} \leqslant \varepsilon, \tag{1.27}$$

上式左端中的范数可依定义(1.1)决定，亦可依其等价范数(1.3)决定。

根据(1.3)，由(1.27)立刻推得，函数序列 $f_m(x)$ 一致收敛于某连续函数 $f(x)$，并且，$f_m(x)$ 直至 n 阶的导数也相应地

一致收敛于 $f(x)$ 的直至 n 阶的导数. 因此, $f(x)$ 为一 $C^{(n)}(T)$ 类函数.

另一方面,由于

$$(f_m - f_{m'})_{n,\lambda} \leqslant \varepsilon, \qquad m, m' > N,$$

故对 T 中任意两点 x_1 和 x_2 均有

$$\left|\left[\frac{d^n f_m(x_1)}{dx^n} - \frac{d^n f_{m'}(x_1)}{dx^n}\right] - \left[\frac{d^n f_m(x_2)}{dx^n} - \frac{d^n f_{m'}(x_2)}{dx^n}\right]\right|$$

$$\leqslant \varepsilon |x_1 - x_2|^\lambda.$$

在上式左端中令 $m' \to \infty$, 则得

$$\left|\left[\frac{d^n f(x_1)}{dx^n} - \frac{d^n f_m(x_1)}{dx^n}\right] - \left[\frac{d^n f(x_2)}{dx^n} - \frac{d^n f_m(x_2)}{dx^n}\right]\right|$$

$$\leqslant \varepsilon |x_1 - x_2|^\lambda.$$

因此, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ 为 $C^{(0,\lambda)}$ 类函数, 即 $f \in C^{(n,\lambda)}$. 由此证明 $C^{(n,\lambda)}$ 空间的完备性. 所以, $C^{(n,\lambda)}$ 为一巴拿赫空间.

所有的 $C^{(n,\lambda)}$ 空间统称 **C 型空间**.

§2 $B^{(n,\lambda)}$ 空间

1) 线性赋范空间 $B^{(n,\lambda)}$

为阅读方便起见,这里,把 $B^{(n,\lambda)}$ 类函数的定义再重抄一下.

设 g 为平面 (x, t) 上一区域. 空间 $B^{(n,\lambda)}(\bar{g})$ $(n \geqslant 0, 0 < \lambda \leqslant 1)$ 中的元素 $f(x, t)$ 属于 $n+1$ 个函数类 (p, q, α, β) 之交,对 f 而言,当 $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ 时,

$$f_{pq\alpha\beta} = \sup_{\substack{(x_1,t_1)\in\bar{g} \\ (x_2,t_2)\in\bar{g}}} \frac{\left|\frac{\partial^{p+q} f(x_1, t_1)}{\partial x^p \partial t^q} - \frac{\partial^{p+q} f(x_2, t_2)}{\partial x^p \partial t^q}\right|}{|x_1 - x_2|^\alpha + |t_1 - t_2|^\beta}$$

均为有限量；当 $\alpha=0$ 时，

$$f_{pq0\beta}=\sup_{\substack{(x,t_1)\in\bar{g}\\(x,t_2)\in\bar{g}}}\frac{\left|\dfrac{\partial^{p+q}f(x,t_1)}{\partial x^p\partial t^q}-\dfrac{\partial^{p+q}f(x,t_2)}{\partial x^p\partial t^q}\right|}{|t_1-t_2|^\beta}$$

均为有限量；这里的 (p,q,α,β) 取值为

$$\begin{aligned}&p=0,1,2,\cdots,n;\\&q=\left[\frac{n-p}{2}\right];\\&\alpha=2\beta=\lambda,\qquad p=n,\ n-2,\ \ n-4,\cdots,\\&\alpha=0,\ \beta=\frac{1+\lambda}{2},\ p=n-1,n-3,\ n-4,\cdots.\end{aligned}\tag{1.28}$$

$B^{(n,\lambda)}$ 空间中的模数定义为

$$\|f\|_{B^{(n,\lambda)}}=\max_{(p,q,\alpha,\beta)}f_{pq\alpha\beta}+f_0,\tag{1.29}$$

其中

$$f_0=\max_{\bar{g}}|f(x,t)|,$$

而 (p,q,α,β) 由 (1.28) 决定[1]。

设 $f\in B^{(n,\lambda)}$. 如果

$$\max_{(p,q,\alpha,\beta)}f_{pq\alpha\beta}=f_{p_0q_0\alpha_0\beta_0},$$

则称函数类 $(p_0,q_0,\alpha_0,\beta_0)$ 为 f 的**模类**. 因此，当 $(p_0,q_0,\alpha_0,\beta_0)$ 为 f 的模类时，

$$\|f\|_{B^{(n,\lambda)}}=f_{p_0q_0\alpha_0\beta_0}+f_0\tag{1.29}$$

同空间 $C^{(n,\lambda)}$ 一样，空间 $B^{(n,\lambda)}$ 也是一个线性赋范空间.

2) 等价范数、完备性

为了研究 $B^{(n,\lambda)}$ 中的等价范数，首先分析一下 $B^{(n,\lambda)}(\bar{g})$ 类函数的导数的估值情况.

1) 这里叙述的 $B^{(n,\lambda)}$ 类定义与第一部分第五章中的 $B^{(n,\lambda)}$ 类定义不完全相同．然而，不难验证，两者是完全等价的．

从 $B^{(n,\lambda)}$ 类的构成可见，当 $\alpha=2\beta=\lambda$ 时，相应的 $\partial^{p+q}f(x,t)/\partial x^p\partial t^q$ 均是 $f(x,t)$ 的一个最高级导数。

记

$$f_{ij}=\max_{\bar{g}}\left|\frac{\partial^{i+j}f(x,t)}{\partial x^i\partial t^j}\right|;$$

并记

$$f_{\bar{p}\bar{q}}=\max_{\substack{p,q\\ \alpha=2\beta=\lambda}} f_{pq},$$

其中 p, q 由 (1.28) 第二、三式决定。因此，$f_{\bar{p}\bar{q}}$ 是 f 的所有最高级导数在 $\bar{g}$ 内的绝对值的最大值中最大者。

现在证明，当 $f\in B^{(n,\lambda)}$ 时，f 的所有非最高级导数在 $\bar{g}$ 内的绝对值的最大值均可用 $f_{\bar{p}\bar{q}}$ 和 f_0 内插估值，即证明

$$f_{ij}=O(\varepsilon f_{\bar{p}\bar{q}}+K_{ij}f_0),\tag{1.30}$$

其中 $i\leqslant p$, $j\leqslant q$, $i+j\leqslant p+q-1$, p, q 由 (1.28) 第二式和第三式决定，ε 为任意参数，K_{ij} 为只依于 ε 的某些常数。

事实上，当 $j=0$ 时，由于 $i<n$，故根据 (1.22) 有

$$f_{i0}=O(\varepsilon f_{n0}+K_{i0}f_0)=O(\varepsilon f_{\bar{p}\bar{q}}+K_{i0}f_0);$$
$$i=0,1,\cdots,n-1;\tag{1.31}$$

而当 $i=0$ 时，若 $j<\left[\frac{n}{2}\right]$，则从 (1.22) 推得

$$\begin{aligned}f_{0j}&=O(\varepsilon f_{0[\frac{n}{2}]}+K_{0j}f_0)\\&=O(\varepsilon f_{\bar{p}\bar{q}}+K_{0j}f_0),\ j=0,1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]-1.\end{aligned}\tag{1.31'}$$

从 $B^{(n,\lambda)}$ 的结构可见，当 $i=0$, $j=\left[\frac{n}{2}\right]$ 时，若 $\partial^j f/\partial t^j$ 不是 f 的最高阶导数，则 $\partial^{j+1}f/\partial x\partial t^j$ 为 f 的最高阶导数；根据 (1.22)，此时，(1.31′) 仍成立。一般地，当 $ij\neq 0$ 时，关于变数 x 应用 (1.22)，可写

$$f_{ij} = O(\varepsilon f_{pj} + \bar{K}_{ij} f_{0j});$$

然后，再关于变数 t 应用 (1.22)，又可写

$$f_{pj} = O(\varepsilon f_{pq} + K_{pj} f_{p0}).$$

由此，考虑到 (1.31) 和 (1.31′)，并适当整理参数和常数后，我们得到[1]

$$\begin{aligned} f_{ij} &= O(\varepsilon^2 f_{pq} + \varepsilon K_{pj} f_{p0} + \bar{K}_{ij} f_0) \\ &= O(\varepsilon f_{\bar{p}\bar{q}} + K_{ij} f_0), \end{aligned}$$

即 (1.30) 得证.

为了研究 $B^{(\sigma,\lambda)}$ 中的等价范数，我们再证明一个关于 f 的最高级导数在 g 内的绝对值的最大值的内插估值，即证明

$$f_{\bar{p}\bar{q}} = O(\varepsilon f_{\bar{p}\bar{q}\lambda\frac{\lambda}{2}} + M f_0), \tag{1.32}$$

其中 O 与 f 无关，ε 为参数，M 为常数，依于 ε 的选择.

(1.32) 的证明.

先讨论 $p = 1$，$q = 0$ 的情形.

这时，利用讨论 (1.11) 的方法，不难验证，

$$f_{10} = O(\varepsilon f_{10\lambda\frac{\lambda}{2}} + \bar{M} f_0). \tag{1.33}$$

现在讨论 (1.32). 设

$$\frac{\partial^{\bar{p}+\bar{q}-1} f(x, t)}{\partial x^{\bar{p}-1} \partial t^{\bar{q}}} = F(x, t),$$

则显然 $F(x, t) \in \left(1, 0, \lambda, \frac{\lambda}{2}\right)$. 根据 (1.33) 有

$$\begin{aligned} F_1 = f_{\bar{p}\bar{q}} &= O(\varepsilon F_{10\lambda\frac{\lambda}{2}} + \bar{M} F_0) \\ &= O(\varepsilon f_{\bar{p}\bar{q}\lambda\frac{\lambda}{2}} + \bar{M} f_{\bar{p}-1\bar{q}}); \end{aligned}$$

但是，

---

1) 今后，所有取值可以任意小的正参数均用 ε 表示. 因此，$\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon$，$k\varepsilon = \varepsilon$，$\varepsilon^m = \varepsilon \cdots$ 其中 k 为正常数，m 为正数.

$$\frac{\partial^{\bar{p}+\bar{q}-1}f(x, t)}{\partial x^{\bar{p}-1}\partial t^{\bar{q}}}$$

不是 f 的最高级导数，所以，依内插估值 (1.30)，可写

$$f_{\bar{p}-1\bar{q}} = O(\eta f_{\bar{p}\bar{q}} + \widetilde{M}f_0);$$

取任意参数 η 充分小，将此式代入上面最后一个估值式后，得到:

$$f_{\bar{p}\bar{q}} = O(\varepsilon f_{\bar{p}\bar{q}\lambda\frac{\lambda}{2}} + Mf_0),$$

即 (1.32) 成立.

设

$$\frac{\partial^{i+j}f(x, t)}{\partial x^i\partial t^j}$$

为 f 的任一导数. (1.32) 亦可记为

$$f_{ij} = O(\varepsilon f_{p_0q_0\alpha_0\beta_0} + Mf_0), \tag{1.32'}$$

其中 $(p_0, q_0, \alpha_0, \beta_0)$ 为 f 的模类，$i \leqslant p, j \leqslant q, p, q$ 由 (1.28) 决定.

最后，我们再强调一下，当 $f \in B^{(n,\lambda)}$ 时，它的所有最高级导数均满足对 x 指数为 λ、对 t 指数为 $\frac{\lambda}{2}$ 的正则条件. 所以，根据内插估值 (1.30) 和 (1.32′) 可以断定

$$\|f\|_A = \max_{(p,q,\alpha,\beta)} f_{pq\alpha\beta} + f_0 \tag{1.29}$$

以及

$$\|f\|_B = \sum_{(p,q,\alpha,\beta)} f_{pq\alpha\beta} + \sum|Df| + f_0 \tag{1.34}$$

为 $B^{(n,\lambda)}$ 中两个等价的范数，(1.34)中 $\sum|Df|$ 表示按 f 的所有可能的导数求和.

根据 (1.29) 和 (1.34) 的等价性，不难证明空间 $B^{(n,\lambda)}$ 的完备性.

所有的 $B^{(n,\lambda)}$ 型空间统称为**B 型空间.**

3） 内插估值

(1.32′) 是 $B^{(n,\lambda)}$ 空间中的一个重要的内插估值．为了今后的需要，我们再讨论另一个 $B^{(n,\lambda)}$ 类函数的内插估值．

先假定 $f\in B^{(1,\lambda)}=\left(1,\ 0,\ \lambda,\ \frac{\lambda}{2}\right)\cap\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{1+\lambda}{2}\right)$，并且，$\left(1,\ 0,\ \lambda,\ \frac{\lambda}{2}\right)$ 为 f 的模类．我们证明，这时，对 f 下述内插估值成立：

$$f_{00\lambda\frac{\lambda}{2}}=O(\varepsilon f_{10\lambda\frac{\lambda}{2}}+Jf_0),\qquad(1.35)$$

其中 ε 为任意参数，J 为某常数，只依于 ε.

事实上，容易看出，

$$I=\frac{|f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2)|}{|x_1-x_2|^\lambda+|t_1-t_2|^{\lambda/2}}\leqslant\frac{|f(x_1,t_1)-f(x_2,t_1)|}{|x_1-x_2|^\lambda}$$
$$+\frac{|f(x_2,t_1)-f(x_2,t_2)|}{|t_1-t_2|^{\lambda/2}}=I_1+I_2,$$

根据 $C^{(n,\lambda)}$ 类函数的内插估值，有

$$I_1=O(\varepsilon f_{10}+J_1f_0).$$

现令

$$\omega=\max_{\substack{(x,t_1)\in\bar{g}\\(x,t_2)\in\bar{g}}}|f(x,t_1)-f(x,t_2)|,$$

$$T_1=\frac{\omega}{f_{000\frac{1}{2}}}=\frac{\omega}{f_{\frac{1}{2}}},$$

$$f_{\frac{1}{2}}=\sup_{\substack{(x,t_1)\in\bar{g}\\(x,t_2)\in\bar{g}}}\frac{|f(x,t_1)-f(x,t_2)|}{|t_1-t_2|^{1/2}}.$$

则有

$$I_2\leqslant\begin{cases}f_{\frac{1}{2}}(T_1)^{1-\lambda}=\omega^{1-\lambda}(f_{\frac{1}{2}})^\lambda, & |t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}\leqslant T_1;\\ \omega(T_1)^{-\lambda}=\omega^{1-\lambda}(f_{\frac{1}{2}})^\lambda, & |t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}\geqslant T_1.\end{cases}$$

由此可以得到内插估值

$$I_2 = O(\varepsilon f_{\frac{1}{2}} + J_2 f_0)$$

但是，显然，

$$f_{\frac{1}{2}} = O(f_{000\frac{1+\lambda}{2}} + f_0).$$

因此，考虑到$\left(1, 0, \lambda, \dfrac{\lambda}{2}\right)$为 f 的模类以及估值式(1.32)，可写

$$I = O(\varepsilon f_{10\lambda\frac{\lambda}{2}} + Jf_0),$$

即证得(1.35)。

现在假定 $f \in B^{(n,\lambda)}$，并且，$\left(n, 0, \lambda, \dfrac{\lambda}{2}\right)$ 为 f 在 $B^{(n,\lambda)}$ 中的模类。这时，对 f 下述内插估值成立：

$$f_{p0\lambda\frac{\lambda}{2}} = O(\varepsilon f_{n0\lambda\frac{\lambda}{2}} + Gf_0), \qquad 0 \leqslant p < n. \qquad (1.36)$$

我们用归纳法证明这个估值。

当 $n = 1$ 时，(1.36)即为(1.35)。

设 $n = k$ 时(1.36)成立，也就是说，若 $f \in B^{(k,\lambda)}$，且$\left(k, 0, \lambda, \dfrac{\lambda}{2}\right)$为 f 之模类，则

$$f_{p0\lambda\frac{\lambda}{2}} = O(\varepsilon f_{k0\lambda\frac{\lambda}{2}} + G_k f_0), \quad 0 \leqslant p \leqslant k-1.$$

现设 $f \in B^{(k+1,\lambda)}$，且$\left(K+1, 0, \lambda, \dfrac{\lambda}{2}\right)$为 f 之模类。

令 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = F$，则$F \in B^{(k,\lambda)}$，且$\left(k, 0, \lambda, \dfrac{\lambda}{2}\right)$为 F 之模类。这时，根据归纳假定，

$$F_{p0\lambda\frac{\lambda}{2}} = O(\varepsilon F_{k0\lambda\frac{\lambda}{2}} + G_k F_0), \qquad 0 \leqslant p \leqslant k-1,$$

即

$$f_{p+10\lambda\frac{\lambda}{2}} = O(\varepsilon f_{k+10\lambda\frac{\lambda}{2}} + G_k F_0);$$

另一方面，根据(1.32′)，可写

$$F_0 = f_{10} = O(\varepsilon f_{k+10\lambda\frac{\lambda}{2}} + \bar{G} f_0).$$

将此式代人前式后，即可证明(1.36)在 $n=k+1$ 时亦成立，因之，它对任何 n 均成立.

从上述讨论过程中可见，当 $f\in B^{(n,\lambda)}$，且 $(p_0, q_0, \alpha_0, \beta_0)$ 为 f 在 $B^{(n,\lambda)}$ 中的模类时，则下述内插估值成立：

$$f_{pq_0\alpha_0\beta_0}=O(\varepsilon f_{p_0q_0\alpha_0\beta_0}+Gf_0), \qquad 0\leqslant p<p_0. \quad (1.36')$$

§3 空间 R

由于下一节的需要，我们再定义一个巴拿赫空间 R. 它的每一个元素 r 均由四个函数组成：

$$r=\{f, \varphi, \chi_1, \chi_2\}\in R,$$

其中

$$f=f(x,t)\in B^{(n,\lambda)}(\bar{g}), \quad \varphi=\varphi(x)\in C^{(n+2,\lambda)}(\bar{k}),$$

$$\chi_i=\chi_i(t)\in C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l}), \qquad i=1, 2.$$

当 r 及 $\bar{r}=\{\bar{f}, \bar{\varphi}, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2\}$ 均属于 R 时，定义

$$r+\bar{r}=\{f+\bar{f}, \varphi+\bar{\varphi}, \chi_1+\bar{\chi}_1, \chi_2+\bar{\chi}_2\};$$

R 中的数乘定义为

$$ar=\{af, a\varphi, a\chi_1, a\chi_2\}.$$

R 中的模定义为

$$\|r\|_R=\|f\|+\|\varphi\|+\|\chi_1\|+\|\chi_2\|,$$

其中

$$\|f\|=\|f\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g})}, \qquad \|\varphi\|=\|\varphi\|_{C^{(n+2,\lambda)}(\bar{k})},$$

$$\|\chi_i\|=\|\chi_i\|_{C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})}, \qquad i=1, 2.$$

不难验证，空间 R 为一完备的线性赋范空间.

第二节 变系数抛物型方程的先验估值

§1 常系数抛物型方程的先验估值

在数学物理方程的经典理论中，为了研究解的存在问题

和讨论解的某些性质，通常是把解写成“显式”，即写出解的具体表达式，如在第一章中所做的那样，为了寻找热传导边值问题的光滑解(或做出解的 B 估值)，把解写成某些热势之和，然后，再研究这些热势的性质.

在解算非线性的数学物理问题中，甚至在讨论变系数的数理方程时，这种方法往往是行不通的，它不仅造成许多技术上的巨大障碍，而且，有时遇到实质性的困难.

克服这个困难主要有两个途径：一条道路是扩充解的概念(如讨论各种“广义解”)；另一条道路是保持解的意义，而运用新的数学手段. 本章中所介绍的，在先验估值的基础上使用泛函分析方法就是后一个方向的典型例子.

从泛函的观点而言，任何一个偏微分方程均可视为一个算子. 例如，在上一章第一节中讨论了热传导算子. 这里，我们再重复一下.

讨论下述热传导第一边值问题：

$$(\mathrm{I})\begin{cases} Lu = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), & (x, t) \in g; \quad (2.1) \\ u(x, 0) = 0, & x \in k; \\ u|_{s_i} = 0, & i = 1, 2, \quad t \in l. \end{cases}$$

热传导算子 L 由巴氏空间 $B^{(n+2, \lambda)}(\bar{g})$ 作用到巴氏空间 $B^{(n, \lambda)}(\bar{g})$，即当 $u \in B^{(n+2, \lambda)}(\bar{g})$，时 $f \in B^{(n, \lambda)}(\bar{g})$. 不难验证，算子 L 是有模的，即

$$\|f\|_{B^{(n, \lambda)}} = O(\|u\|_{B^{(n+2, \lambda)}}). \qquad (2.2)$$

另一方面，第一章的中心定理说明，热传导算子有逆算子 L^{-1}，它也是有模算子，即当 $f \in B^{(n, \lambda)}$ 时，可找到唯一的 $u \in B^{(n+2, \lambda)}$ 与之相对应，使 $Lu = f$，或 $L^{-1}f = u$，同时，

$$\|u\|_{B^{(n+2, \lambda)}} = O(\|f\|_{B^{(n, \lambda)}}). \qquad (2.3)$$

这个结论也可以这样理解：任取一个属于 $B^{(n+2, \lambda)}(\bar{g})$ 的、

始值和边值均为零的函数

$$u \in B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g}), \quad u(x,0)=0, \quad u|_{S_i}=0,$$
$$i=1,2,$$

将其代入到方程 (2.1) 的左端，经计算后，得到另一个函数

$$f(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t},$$

这时，所得到的函数 f 和原来的函数 u 之间不但满足估值 (2.2)，而且，还满足估值 (2.3).

对估值 (2.3) 的这种理解赋予它以“先验”的意义[1]. 也就是说，估值 (1.3) 的建立，完全可能不以问题 (I) 有光滑解为前提. 因此，无论光滑解存在与否，如果我们能设法建立估值 (1.3)，那么，它便是一个先验的解的估值. 这个估值的先验意义在于：如果解确实存在，那么，这个先验就能变成现实；如果解根本不存在，那么，这个先验就要落空.

但是，每当先验估值一旦建立，人们总是设法利用它来证明解确是存在的. 在本章中，我们首先对一般变系数抛物型方程的边值问题建立先验估值；然后，依靠这个估值，再利用压缩映象原理证明这些边值问题的光滑解存在.

热传导方程

$$au_{xx}-u_t=f$$

也称为常系数的抛物型方程，$a>0$.

本段中，先讨论常系数抛物型方程的简单情形. 今后，为书写方便起见，仅讨论第一边值问题.

现在，先把 $a=1$ 的热传导方程第一边值问题的先验估值写出来. 讨论第一边值问题：

---

1) “先验估值”的主要涵义是：在没有确知解存在的前提下，对它进行某种期望的、先验的、经验的估计. 这些估计可以从解的各方面来做. (2.3) 是在 B 型空间的范数意义下进行的估计. 类似地，还可以在 C 型空间范数意义下或其它意义下先验地估计解的大小.

$$
(\text{II})\begin{cases}Lu=u_{xx}-u_t=f(x,t), & (x,t)\in g; \quad (2.1)\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in k; \quad (2.4)\\ u|_{S_i}=\chi_i(t),\quad i=1,2, & t\in l. \quad (2.5)\end{cases}
$$

为简便计，不妨设 n 为偶数，并假定 $S_i\in C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}$ 类 $(i=1,2)$.

如果函数 $u\in B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$，因之，根据 $C^{(n,\lambda)}$ 类函数辅助定理(见"热势论基础"第六章第一节)，

$$
u(x,0)=\varphi(x)\in C^{(n+2,\lambda)}(\bar{k}),
$$

$$
u|_{S_i}=\chi_i(t)\in C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l}),\quad i=1,2.
$$

这时，将 u 代入 (2.1) 后所得之函数 $f\in B^{(n,\lambda)}(\bar{g})$. 依第一章之中心定理，对问题 (II) 下述先验估值成立[1]:

$$
\|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})}\leqslant K(\|f\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g})}+\|\varphi\|_{C^{(n+2,\lambda)}(\bar{k})}
+\|\chi\|_{C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})}), \quad (2.6)
$$

其中

$$
\|\chi\|_{C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})}=\max_{i=1,2}\|\chi_i\|_{C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})},
$$

并且，常数 K 与 u,f,φ,χ_i 均无关，它只依赖于区域 g 及时间常数 T.

现在，我们讨论常系数抛物型方程的第一边值问题:

$$
(\text{III})\begin{cases}au_{xx}-u_t=f(x,t), & (x,t)\in g; \quad (2.7)\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in k; \quad (2.4)\\ u|_{S_i}=\chi_i(t),\quad i=1,2, & t\in l, \quad (2.5)\end{cases}
$$

其中 a 为某常数，$A_0\geqslant a\geqslant a_0>0$.

为节省篇幅起见，不妨仍令 n 为偶数，并且，设

$$
S_i\in C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})} \text{类},\ i=1,2.
$$

为了对问题 (III) 建立先验估值，设法将问题 (III) 写成问题

1) 由于热势论的中心定理成立，这个"先验"估值有"现实"意义.

(II) 的形状。

变数替换

$$\begin{cases}\bar{t}=at,\\ \bar{x}=x.\end{cases}$$

将区域 g 变为 g':

$$g'=\left\{(\bar{x},\bar{t}),\ \bar{\Phi}_1(\bar{t})=\psi_1\left(\frac{\bar{t}}{a}\right)\leqslant\bar{x}\leqslant\psi_2\left(\frac{\bar{t}}{a}\right)\right.$$

$$\left.=\bar{\Phi}_2(\bar{t}),\ 0\leqslant\bar{t}\leqslant aT\right\},$$

其两侧边为 $\bar{S}_i$:

$$\bar{S}_i=\left\{(\bar{x},\ \bar{t}),\qquad \bar{x}=\psi_i\left(\frac{\bar{t}}{a}\right)=\bar{\Phi}_i(\bar{t}),\right.$$

$$\left.0\leqslant\bar{t}\leqslant aT\right\},\qquad i=1,\ 2;$$

这时,函数 u 变为

$$u(x,\ t)=u\left(\bar{x},\ \frac{\bar{t}}{a}\right)=\bar{u}(\bar{x},\ \bar{t}),$$

方程 (2.7) 变为

$$\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}-\bar{u}_{\bar{t}}=\frac{f\left(\bar{x},\ \frac{\bar{t}}{a}\right)}{a}=\bar{f}(\bar{x},\ \bar{t}),\qquad(\bar{x},\bar{t})\in g',$$

边界条件 (2.5) 变为

$$u|_{S_i}=\bar{u}(\bar{x},\ \bar{t})|_{\bar{S}_i}=\chi_i\left(\frac{\bar{t}}{a}\right)=\bar{\chi}_i(\bar{t}),$$

$$\bar{t}\in\bar{I}'=[0,\ aT],\qquad i=1,\ 2.$$

这样,根据 (2.6),可写出问题 (III) 的先验估值:

$$\|\bar{u}\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g}')}\leqslant\bar{K}(\|\bar{f}\|+\|\varphi\|+\|\bar{\chi}\|),\qquad(2.8)$$

其中

$$\|\bar{f}\|=\|\bar{f}\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g}')},\qquad\|\bar{\chi}\|=\max_i\|\bar{\chi}_i\|_{C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}(I')},$$

$\bar{K}$ 为某常数,只与 g 和 $\bar{T}=aT$ 有关.

先验估值 (2.8) 是写在坐标系 $(\bar{x},\ \bar{t})$ 中的. 为了得到问

题(III)的在(x, t)坐标系中的先验估值,我们应讨论在坐标系(x, t)与坐标系$(\bar{x}, \bar{t})$中函数模(C型及B型)之间的关系.

容易验证,

$$u_{t^m} = a^m \bar{u}_{\bar{t}^m}. \qquad (m\text{为正整数})$$

因此,

$$\bar{u}_{m,\mu} = \frac{1}{a^{m+\mu}} u_{m,\mu}, \qquad (0 < \mu \leqslant 1)$$

这里的$\bar{u}_{m,\mu}$表示$\bar{u}_{\bar{t}^m} = \partial^m \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})/\partial \bar{t}^m$在$(\bar{x}, \bar{t})$坐标系中的指数为$\mu$的正则系数. 但是,

$$\bar{u}_0 = u_0,$$

所以,

$$\begin{aligned} A_0^{-m-\mu}\|u\|_{C^{(m,\mu)}(\bar{g})} &\leqslant \|\bar{u}\|_{C^{(m,\mu)}(\bar{g}')} \\ &= \bar{u}_0 + \bar{u}_{m,\mu} \leqslant a_0^{-m-\mu}\|u\|_{C^{(m,\mu)}(\bar{g})}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

这便是u在不同坐标系的$C^{(m,\mu)}$类中的模之间的关系.

现在讨论(p, q, α, β)类.

显然,

$$\frac{\left|\dfrac{\partial^{p+q}\bar{u}(\bar{x}_1,\bar{t}_1)}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{t}^q} - \dfrac{\partial^{p+q}\bar{u}(\bar{x}_2, \bar{t}_2)}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{t}^q}\right|}{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|^\alpha + |\bar{t}_1 - \bar{t}_2|^\beta} = \frac{a^{-q}\left|\dfrac{\partial^{p+q}u(x_1, t_1)}{\partial x^p \partial t^q} - \dfrac{\partial^{p+q}u(x_2, t_2)}{\partial x^p \partial t^q}\right|}{|x_1 - x_2|^\alpha + a^\beta |t_1 - t_2|^\beta},$$

因此,

$$\begin{aligned} A_0^{-q}[\max(1, A_0)]^{-\beta} u_{pq\alpha\beta} &\leqslant \bar{u}_{pq\alpha\beta} \leqslant \\ &a_0^{-q}[\min(1, a_0)]^{-\beta} u_{pq\alpha\beta}; \end{aligned} \tag{2.10}$$

由此推得,有仅依赖于a_0, A_0和n的常数C_1和$\bar{C}_1$,使

$$C_1\|u\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g})} \leqslant \|\bar{u}\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g}')} \leqslant \bar{C}_1\|u\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g})}. \tag{2.11}$$

根据(2.11)和(2.9)，可以把估值(2.8)写为

$$
\begin{aligned}
C_1\|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})} &\leqslant \|\bar{u}\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g}')} \\
&\leqslant \bar{K}\left(\bar{C}_1\|f\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g})} + \|\varphi\| + \bar{C}_1\|\chi\|_{C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}(l)}\right) \\
&\leqslant \bar{\bar{K}}(\|f\| + \|\varphi\| + \|\chi\|).
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})} \leqslant K'(\|f\| + \|\varphi\| + \|\chi\|), \tag{2.12}
$$

其中常数 K' 只依赖于 a_0, A_0, T, n 和区域 g.

(2.12)便是我们要建立的常系数抛物型方程的先验估值. 我们再重复一下它的“先验”价值: 任取一个函数 $u(x, t) \in B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$，其始值为

$$
u(x, 0) = \varphi(x),
$$

它在曲线 S_i 上取值为

$$
u(\psi_i(t), t) = \chi_i(t), \qquad i = 1, 2,
$$

将其代入(2.7)后得到函数 $f(x,t)$，则 u, φ, χ_i 及 f 间成立估值(2.12)，其中 K' 与 u(因而与 f, φ 和 χ_i)无关.

从我们的讨论过程中可见，由于热势论的中心定理成立，常系数抛物型方程的先验估值(2.12)仍然有现实意义[1]. 然而，在变系数方程的情形，情况就完全不同了. 为了建立它的先验估值，要使用新的方法，那里，先验估值的“先验”意义是十分明显的.

§2 变系数抛物型方程的先验估值

方程

$$
a(x,t)u_{xx} - u_t = f(x,t)
$$

在 $a(x, t) > 0$ 时叫做(变系数)抛物型方程.

---

1) 从本书第一部分的结果可见，如果重复第一章中所有的讨论，就可以直接建立估值(2.12). 这里，我们从(2.6)出发来建立(2.12)，一方面说明了先验估值的一种获得方法，另一方面，也是为了满足下一段的需要.

现在考虑变系数抛物型方程的第一边值问题:

$$
\text{(IV)}\begin{cases} a(x,t)u_{xx} - u_t = f(x,t), & (x,t)\in g; \quad (2.13)\\ u(x,0) = \varphi(x), & x\in k; \quad (2.4)\\ u|_{S_i} = \chi_i(t),\quad i=1,2, & t\in l; \quad (2.5)\end{cases}
$$

其中 $a(x,t)\in B^{(n,\lambda)}(\bar{g})$, $A_0 \geqslant a(x,t) \geqslant a_0 > 0$.

为了建立问题 (IV) 的先验估值，设法应用前段的结果. 为此,分别讨论下述两种情形: $a(x,t)$ 的振幅充分小的情形和一般情形.

1) 小振幅情形

仍和从前一样，不妨设 n 为偶数，$S_i\in C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}$, $i=1,2$.

任取 g 一内点 $(x_0,t_0)\in g$, 可将方程 (2.13) 写为

$$
\begin{aligned} a(x_0,t_0)u_{xx} - u_t &= [a(x_0,t_0) - a(x,t)]u_{xx} + f(x,t)\\ &= F(x,t). \end{aligned} \tag{2.14}
$$

对于由方程 (2.14) 及条件 (2.4) 和 (2.5) 所构成的第一边值问题而言,成立先验估值 (2.12)[1], 即

$$
\|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})} \leqslant K'(\|F\| + \|\varphi\| + \|\chi\|), \tag{2.15}
$$

其中

$$
\|F\| = \|F\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g})},
$$

常数 K' 只与 a_0、A_0、T 及区域 g 有关,与 u 无关.

现在估算 $\|F\|$ 的大小.

显然,

$$
F_0 \leqslant f_0 + \omega u_2, \tag{2.16}
$$

这里,

$$
F_0 = \max_{\bar{g}}|F(x,t)|,\quad f_0 = \max_{\bar{g}}|f(x,t)|,
$$

$$
\omega = \max_{\substack{(x_1,t_1)\in\bar{g}\\(x_2,t_2)\in\bar{g}}} |a(x_1,t_1) - a(x_2,t_2)|
$$

---

1) 当 $u(x,t)$ 给定后，$f(x,t)$ 由 (2.13) 确定，因而，对此 u 而言，可由 (2.14) 决定 F. 然而，(2.14) 已是常系数抛物型方程了.

是 $a(x,t)$ 在 $\bar{g}$ 上的振幅，

$$u_2=\max_{\bar{g}}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|.$$

令

$$\begin{aligned} h(x,t) &= [a(x_0,t_0)-a(x,t)]u_{xx}(x,t) \\ &= F(x,t)-f(x,t). \end{aligned}$$

当 $u\in B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 时，$h\in B^{(n,\lambda)}(\bar{g})$.

现在，不妨先假定，对 u 而言，$\left(n+2,0,\lambda,\frac{\lambda}{2}\right)$ 为它在 $B^{(n+2,\lambda)}$ 中的模类. 同时，先讨论 $\left(n,0,\lambda,\frac{\lambda}{2}\right)$ 为 $F(x,t)$ 在 $B^{(n,\lambda)}$ 中的模类的情形. 在这种假定下，我们先设法估计 $h_{n0\lambda\frac{\lambda}{2}}$ 的大小，然后再估计 $F_{n0\lambda\frac{\lambda}{2}}$.

显然，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n h(x,t)}{\partial x^n} &= [a(x_0,t_0)-a(x,t)]\frac{\partial^{n+2}u(x,t)}{\partial x^{n+2}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial^i a(x,t)}{\partial x^i}\frac{\partial^{n+2-i}u(x,t)}{\partial x^{n+2-i}} \\ &= N(x,t)+\sum_{i=1}^{n}M^i(x,t), \end{aligned} \tag{2.17}$$

其中 b_i 为某些常数.

先讨论 (2.17) 中第一项. 不难看出，

$$\begin{aligned} &\frac{|N(x_1,t_1)-N(x_2,t_2)|}{|x_1-x_2|^\lambda+|t_1-t_2|^{\lambda/2}} \\ &\leqslant \frac{|[a(x_0,t_0)-a(x_1,t_1)][u^{n+2}(x_1,t_1)-u^{n+2}(x_2,t_2)]|}{|x_1-x_2|^\lambda+|t_1-t_2|^{\lambda/2}} \\ &\quad + \frac{|a(x_2,t_2)-a(x_1,t_1)|}{|x_1-x_2|^\lambda+|t_1-t_2|^{\lambda/2}}|u^{n+2}(x_2,t_2)|, \end{aligned}$$

此处

$$u^{n+2}(x,\ t)=\frac{\partial^{n+2}u(x,t)}{\partial x^{n+2}}.$$

因此，

$$N_{00\lambda\frac{\lambda}{2}}\leqslant \omega u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}}+a_{00\lambda\frac{\lambda}{2}}u_{n+2},\tag{2.18}$$

$$u_{n+2}=\max_{\bar{g}}|u^{n+2}(x,\ t)|.$$

其次，讨论 (2.17) 中其它 n 项. 写

$$M^i(x,\ t)=\bar{a}^i(x,\ t)u^j(x,\ t),$$

$$\bar{a}^i=b_ia^i=b_i\frac{\partial^i a(x,\ t)}{\partial x^i},$$

$$u^j=\frac{\partial^{n+2-i}u(x,\ t)}{\partial x^{n+2-i}},\qquad j=n+2-i.$$

这时，

$$\begin{aligned}&|M^i(x_1,\ t_1)-M^i(x_2,\ t_2)|\\&\quad\leqslant|\bar{a}^i(x_1,\ t_1)-\bar{a}^i(x_2,\ t_2)||u^j(x_1,\ t_1)|\\&\quad+|\bar{a}^i(x_2,\ t_2)||u^j(x_1,\ t_1)-u^j(x_2,\ t_2)|,\end{aligned}$$

所以，

$$M^i{}_{00\lambda\frac{\lambda}{2}}\leqslant\bar{a}^i{}_{0\lambda\frac{\lambda}{2}}u_j+\bar{a}_iu_{j0\lambda\frac{\lambda}{2}},$$

$$2\leqslant j\leqslant n+1,\qquad 1\leqslant i\leqslant n,\tag{2.18'}$$

这里

$$u_j=\max_{\bar{g}}\left|\frac{\partial^j u(x,\ t)}{\partial x^j}\right|,$$

$$\bar{a}_i=\max_{\bar{g}}\left|\frac{\partial^i\bar{a}(x,\ t)}{\partial x^i}\right|.$$

这样，考虑到前一节所建立的内插估值 (1.32′) 及 (1.36)，可写

$$h_{n0\lambda\frac{\lambda}{2}}\leqslant N_{00\lambda\frac{\lambda}{2}}+\sum_{i=1}^{n}M^i{}_{00\lambda\frac{\lambda}{2}}$$

$$\leqslant \omega u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}} + b\|a\|\sum_{j=2}^{n+2} u_j + b\|a\|\sum_{j=2}^{n+1} u_{j0\lambda\frac{\lambda}{2}}$$

$$\leqslant \omega u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}} + \varepsilon Q u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}} + \bar{Q} u_0, \qquad (2.19)$$

其中

$$\|a\| = \|a\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g})}, \qquad b = \max|b_k|;$$

此外,要特别指出,由于上一节的内插估值(1.32′)及(1.36),(2.19)式中的参数 ε 可选择为任意小的正数;常数 Q 仅依于 $\|a\|$,与 ε 无关,与 u 亦无关;常数 $\bar{Q}$ 除依赖于 $\|a\|$ 以外,还依赖于 ε 的选择,但仍与 u 无关!

由(2.19)推出

$$F_{n0\lambda\frac{\lambda}{2}} \leqslant h_{n0\lambda\frac{\lambda}{2}} + f_{n0\lambda\frac{\lambda}{2}}$$

$$\leqslant \omega u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}} + \varepsilon Q u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}} + \bar{Q} u_0 + f_{n0\lambda\frac{\lambda}{2}}. \quad (2.20)$$

另一方面,根据上一节内插估值(1.32′),还可写出

$$u_2 \leqslant \bar{\varepsilon} R u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}} + \bar{R} u_0,$$

其中 $\bar{\varepsilon}$ 亦为某"小参数",R 为某常数,与 $\bar{\varepsilon}$ 无关,$\bar{R}$ 依于 $\bar{\varepsilon}$ 的选择.

这样,把估值(2.20)和(2.16)及(2.15)结合起来,我们得到

$$\begin{aligned} u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}} + u_0 &\leqslant K'(\|F\| + \|\varphi\| + \|\chi\|) \\ &\leqslant K'(F_{n0\lambda\frac{\lambda}{2}} + F_0 + \|\varphi\| + \|\chi\|) \\ &\leqslant K'(\omega u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}} + \varepsilon Q u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}} + \bar{Q} u_0 \\ &\quad + f_{n0\lambda\frac{\lambda}{2}} + f_0 + \bar{\varepsilon} R \omega u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}} + \omega \bar{R} u_0 \\ &\quad + \|\varphi\| + \|\chi\|). \end{aligned} \qquad (2.20')$$

现在选择参数 ε 充分小,使

$$\varepsilon Q K' \leqslant \frac{1}{8}.$$

这时,如果 ω 也充分小,以至

$$K'\omega \leqslant \frac{1}{4},$$

即

$$\omega \leqslant \frac{1}{4K'} = K_0; \tag{2.21}$$

此后,可再选择 $\bar{\varepsilon}$,使

$$\bar{\varepsilon} R\omega \leqslant \frac{1}{8}.$$

这时,把这些选择好的参数代入上面的估值式(2.20′)后,得到

$$\frac{1}{2} u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}} + u_0 \leqslant K'\{(\bar{Q} + \bar{R}\omega)u_0 + \|f\| + \|\varphi\| + \|\chi\|\},$$

或者,

$$\begin{aligned} \|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})} &= u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}} + u_0 \\ &\leqslant [2K'(\bar{Q} + \bar{R}\omega) - 1]u_0 \\ &\quad + 2K'(\|f\| + \|\varphi\| + \|\chi\|). \end{aligned} \tag{2.22}$$

这便是问题(IV)的一个先验估值. 为了进一步估计上式右端的 u_0,我们指出,对于问题(IV)而言,成立极值原理[1]. 因而,有常数 c,使

$$u_0 \leqslant c(f_0 + \varphi_0 + \chi_0). \tag{2.23}$$

这样,可把上面得到的估值(2.22)改写为

$$\|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})} \leqslant K''(\|f\| + \|\varphi\| + \|\chi\|), \tag{2.24}$$

其中 K'' 为某常数,它只依赖于 a_0, A_0, $\|a\|$, T 及 g,但与 u(因而与 f, φ, χ_i)无关.

(2.24)即是我们所要建立的问题(IV)的先验估值. 它是在条件(2.21)成立的情况下获得的.

---

1) 这也是问题(IV)的一种先验估值. 利用"热势论基础"第四章第一节证明极值原理的方法,可以证明这个先验估值.

为了得到估值 (2.24)，我们假定了 $\left(n, 0, \lambda, \frac{\lambda}{2}\right)$ 为 $F(x, t)$ 在 $B^{(n,\lambda)}$ 中的模类. 现在假定 $(p_0, q_0, \alpha_0, \beta_0)$ 为 $F(x, t)$ 在 $B^{(n,\lambda)}$ 中的模类，此处 $(p_0, q_0, \alpha_0, \beta_0)$ 为由前一节 (1.28) 所确定的某 (p, q, α, β) 值. 在这种情况下，根据前一节中所建立的内插估值 (1.32′) 和 (1.36′)，依次重复前面所有的讨论，仍可证明估值 (2.22) 的正确性. 有兴趣的读者，可以自己做完这个证明. 这里，我们仅指出，根据 $B^{(n,\lambda)}$ 函数类的结构，$u(x, t)$ 必属于 $(p_0+2, q_0, \alpha_0, \beta_0)$ 类；此外，由于 $\left(n+2, 0, \lambda, \frac{\lambda}{2}\right)$ 为 $u(x, t)$ 在 $B^{(n+2,\lambda)}$ 中的模类，故

$$u_{p_0+2q_0\alpha_0\beta_0} \leqslant u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}}.$$

在证明估值 (2.24) 时，我们还假定了 $\left(n+2, 0, \lambda, \frac{\lambda}{2}\right)$ 为 $u(x, t)$ 在 $B^{(n+2,\lambda)}$ 中的模类. 这只是为了叙述明确起见而假定的. 当 $\left(n+2, 0, \lambda, \frac{\lambda}{2}\right)$ 不是模类时，鉴于前一节的内插公式 (1.32′) 和 (1.36′)、"小参数" ε 的适当选择及振幅 ω 的充分小，仍然能证明 (2.24) 的正确性. 这里不一一赘述了.

2) 一般情形

现在，我们去掉 ω 充分小的条件，继续证明 (2.24) 的正确性.

首先，我们注意到，如果方程 (2.13) 取下面的形状

$$a(x, t)u_{xx} - Bu_t = f(x, t), \tag{2.13′}$$

其中 $a(x, t)$ 的振幅满足条件 (2.21)，B 为某正常数，那么，根据本节第一段中的讨论可知，借助于变数替换能够证明，此时，先验估值 (2.24) 仍有效，只不过那里的 K'' 还依赖于 B 的大小.

当 (2.13) 中的 $a(x, t)$ 不满足小振幅条件 (2.21) 时，可用常数

$$B = \frac{K_0}{2A_0}$$

乘方程 (2.13) 的两端，并令

$$b(x, t) = Ba(x, t),$$

则

$$\omega_b = \max_{\substack{(x_1,t_1)\in \bar{g}\\(x_2,t_2)\in \bar{g}}} |b(x_1, t_1) - b(x_2, t_2)| \leqslant K_0,$$

即 $b(x, t)$ 满足小振幅条件 (2.21). 这时，方程 (2.13) 变为

$$b(x, t)u_{xx} - Bu_t = Bf(x, t). \tag{2.25}$$

所以，对由 (2.25)，(2.4) 和 (2.5) 所组成的第一边值问题仍成立先验估值 (2.24).

最后，我们把本节中的讨论简要地总结一下.

最初，从热传导方程的先验估值 (2.6) 出发，我们证明了常系数抛物型方程的先验估值 (2.12)，然后，又证明这个估值对“非常接近常系数的变系数方程”(即带有小振幅系数的方程)依然成立，最后，证明了它对一般变系数方程的有效性. 这里，我们再强调一下，估值 (2.24) 对于问题 (IV) 只有**“先验”**的价值，这就是说，如果问题 (IV) 确实有属于 $B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 的解，那么，它一定满足估值 (2.24). 然而，估值 (2.24) 的建立，并不意味着问题 (IV) 一定有光滑解. 对估值 (2.24) 应这样理解：任取一个属于 $B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 的函数 $u(x, t)$，(根据辅助定理，它的始值 $u(x,0) = \varphi(x)$ 属于 $C^{(n+2,\lambda)}(\bar{k})$ 函数类，它的边值 $u(x, t)|_{s_i} = \chi_i(t)$ 属于 $C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})$ 类，$i = 1,2$，) 把它代入到方程 (2.13) 左端，得到函数 $f(x, t)$，在 u 及 f，φ 和 χ_i 间成立关系式 (2.24).

虽然 (2.24) 对问题 (IV) 只有先验的意义，但是，它仍然

给我们很大的启示：估值 (2.24) 划定了问题 (IV) 的光滑解可能存在的范围(在 $B^{(n+2,\lambda)}$ 模数意义下),这就使我们在寻找问题 (IV) 的光滑解前进的道路上减少了很多盲目性．在下一节中,我们将采用泛函方法,在 (2.24) 所规定的范围内，去寻找问题 (IV) 的光滑解．

顺便指出，为了缩短篇幅，我们只讨论了 n 为偶数的情形．不难验证,当 n 为奇数时,估值 (2.24) 仍成立．

注 1 由估值 (2.24) 的推导过程中可见，它对于一般变系数抛物型方程

$$a(x, t)u_{xx} - u_t + b(x, t)u_x + c(x,t)u = f(x,t) \quad (2.26)$$

也是成立的，这里的 $b(x, t)$，$c(x, t)$ 均属于 $B^{(n,\lambda)}(\bar{g})$．同时,为了获得相应的先验估值 (2.23)，还假定 $c < 0$．

方程 (2.26) 与 (2.23) 相较，只增加了两个"低阶项" bu_x 和 cu．由于上一节内插公式 (1.32′) 和 (1.36′), 它们不影响对 $u_{n+20\lambda\frac{\lambda}{2}}$ 的估计．(见本章 (2.22))

注 2 由估值 (2.24) 的推导过程中可见，它不仅对于第一边值问题有效,而且,也适用于第二、第三边值问题．

(1.23) 是第一边值问题的解的最大模的先验估值，对于第二、第三边值问题仍成立类似的估值．这里,我们写出这个估值．

讨论下述边值问题：

$$(\mathrm{V})\begin{cases} a(x, t)u_{xx} - u_t + b(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x, t) \in g; \\ u(x, 0) = \varphi(x), \qquad\qquad\qquad\qquad x \in k; \\ [\alpha(x, t)u_x + \beta(x, t)u]_{s_i} = \chi_i(t),\ i = 1, 2,\ t \in l. \end{cases}$$

设 a, b, c, α, β, f, φ 及 χ_i $(i = 1, 2)$ 为连续函数，$a \geqslant a_0 > 0$，$c < 0$，$\alpha^2 + \beta^2 > 0$，$\alpha \geqslant 0$，$\beta \leqslant 0$．若 u_{xx} 及 u_t 在 $\bar{g}$ 内连续,则先验估值

$$u_0 = O(f_0 + \varphi_0 + \chi_0) \tag{2.27}$$

成立，其中O只与a，b，c，α和β有关，与u(因而与f，φ和χ_i)无关.

将(2.27)代入到(2.22)后可见，先验估值(2.24)对边值问题(V)仍成立.

由于(2.27)成立，也可以代替第一边值问题，讨论混合边值问题，即在区域一侧边上给出的是第一类型边值条件，在另一侧边上给出的是第二或第三类型的边值条件.

注3 我们再重复一下，仔细分析(2.24)的证明过程，可以发现，关键在于估计$u_{n+2\alpha\lambda\frac{\lambda}{2}}$，即获得估值(2.22).因此，在方程(2.13)中加入一些"低阶项"，并不影响估值(2.24)的建立.

鉴于这种考虑，我们可以代替线性方程(2.26)，进一步讨论某些非线性问题.

讨论下述**拟线性抛物型方程的边值问题**:

$$(\mathrm{VI})\begin{cases} a(x,\ t,\ u,\ u_x)u_{xx} - u_t + G(u,\ u_x) = f(x,\ t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,\ t) \in g; \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), \qquad\qquad\qquad x \in k; \\ [\alpha u_x + \beta u]_{S_i} = \chi_i(t), \quad i = 1,\ 2, \quad t \in l. \end{cases}$$

假定

i) $A_0 \geqslant a \geqslant a_0 > 0$，$A_0$和$a_0$为二正常数，并且，对于任何$u \in B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$而言，$a(x,\ t,\ u,\ u_x)$关于$(x,\ t)$属于$B^{(n,\lambda)}(\bar{g})$类，同时，

$$\|a\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g})} \leqslant \bar{A} = 常数$$

对于所有上述的u一致地成立.

ii) 对任给$u \in B^{(n+1,\lambda)}(\bar{g})$而言，函数$G(u,\ u_x)$均属于$B^{(n,\lambda)}(\bar{g})$，而且，

$$\|G\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g})} = O(\|u\|_{B^{(n+1,\lambda)}(\bar{g})}),$$

上式右端的 O 与 u 无关.

iii) $f, \varphi, \chi_i, \alpha, \beta$ 和曲线 $S_i(i=1,2)$ 足够光滑，即它们相应地属于所须要的 B 型或 C 型空间.

采用(1.22)的推导方法，容易验证，对问题(VI)成立下述先验估值：

$$\|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})} = O(\|f\| + \|\varphi\| + \|\chi\| + u_0) \quad (2.28)$$

这里的 O 与函数 u 无关.

从上述讨论过程中可见，非线性(拟线性)方程的先验估值，有赖于线性方程的先验估值的获得. 当然，为了适应我们的证明方法，在得到(2.28)时，我们做了不少的假定. 进一步深入的研究表明，这些条件是可以大大减弱的. 这个情况十分有助于解算许多非线性问题.

第三节 变系数抛物型方程各种边值问题的光滑解

本节中将证明变系数抛物型方程的各种边值问题有光滑解，并估计它们的大小. 首先讨论第一边值问题.

§1 第一边值问题

1) 问题的提出

现在，依靠前节中建立的先验估值(2.24)，证明变系数抛物型方程第一边值问题的光滑解是存在的.

讨论变系数抛物型方程的第一边值问题：

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\mathscr{L}u = a(x,t)u_{xx} - u_t = f_1(x,t), & (x,t)\in g; \quad (3.1)\\ u(x,0) = \varphi(x), & x\in k; \quad (3.2)\\ u|_{S_i} = \chi_i(t), \quad i=1,2, & t\in l; \quad (3.3)\end{cases}$$

其中 $A_0 \geqslant a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, $a_0 < 1$, $A_0 > 1$ 为二常数.

不妨仍先设 n 为偶数，并假定 $S_i \in C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}$ 类，$n \geqslant 0$,

$0 < \lambda \leqslant 1,\ i = 1, 2,\ a(x, t) \in B^{(n,\lambda)}(\bar{g})$.

与此同时,我们还讨论热传导方程的第一边值问题:

$$(\text{II})\begin{cases} Lu = u_{xx} - u_t = f_0(x, t), & (x, t) \in g; \quad (3.4) \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k; \quad (3.2) \\ u|_{s_i} = \chi_i(t), \quad i = 1, 2, & t \in l. \quad (3.3) \end{cases}$$

在本部分第一章中,已经证明了问题(II)的光滑解的存在性. 依据这个结果,以及前节先验估值(2.24),我们运用压缩映象原理来证明问题(I)的光滑解也是存在的. 在这个证明过程中,还要采用"参数拓展法": 依下法引入实参数τ:

$$\mathscr{L}_\tau u = Lu + \tau(\mathscr{L} - L)u = [L + \tau(\mathscr{L} - L)]u$$
$$= [\tau a(x, t) + (1 - \tau)]u_{xx} - u_t,$$

同时,列出带参数τ的第一边值问题:

$$(\text{III})\begin{cases} \mathscr{L}_\tau u = f_\tau(x, t), & (x, t) \in g; \quad (3.5) \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k; \quad (3.2) \\ u|_{s_i} = \chi_i(t), \quad i = 1, 2, & t \in l. \quad (3.3) \end{cases}$$

显然,当$\tau = 0$时,问题(III)变为问题(II);当$\tau = 1$时,问题(III)变为问题(I). 我们的任务在于从问题(II)的光滑解法中学会解问题(I). 为了完成这个任务,我们以拓展参数为手段,即设法沿参数τ从$\tau = 0$起一步步地拓展问题(III)的光滑解,直至$\tau = 1$时为止.

现在,我们利用泛函分析的语言,把上述课题再重复一下.

算子$\mathscr{L}_\tau$建立了空间$B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$和空间$R$之间的对应(空间$R$的定义见第二章第一节,它的每个元素由4个函数组成$r = \{f_\tau, \varphi, \chi_1, \chi_2\}$),即$\mathscr{L}_\tau$由$B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$作用到$R$. 当$\tau = 0$时,根据第一章的中心定理,问题(II)有属于$B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$的光滑解,也就是说,$\mathscr{L}_0^{-1} = L^{-1}$存在. 这时,对于任何$r = \{f_0, \varphi, \chi_1, \chi_2\} \in R$,可写

$$L^{-1}r = u \in B^{(n+2,\lambda)}.$$

我们的任务在于证明 $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}$ 的逆算子 $\mathscr{L}^{-1}$ 是存在的．为此，设法证明当 $\tau \leqslant 1$ 时 $\mathscr{L}_\tau$ 均有逆算子 $\mathscr{L}_\tau^{-1}$．

2） 问题的解决

我们首先用"泛函分析的语言"证明，当 $\tau \leqslant 1$ 时，$\mathscr{L}_\tau^{-1}$ 均存在；然后，再用"微分方程的语言"解释清楚这个论断的具体内容．

对于任给 $u \in B^{(n+2,\lambda)}$，显然有：

$$\mathscr{L}_\tau u = r = \{f_\tau, \varphi, \chi_1, \chi_2\} \in R, \tag{3.6}$$

然而，L^{-1} 存在，所以，

$$L^{-1}\mathscr{L}_\tau u = L^{-1}r \in B^{(n+2,\lambda)}, \tag{3.7}$$

即积算子 $L^{-1}\mathscr{L}_\tau$ 为一由 $B^{(n+2,\lambda)}$ 空间作用到本空间中的算子．可是，

$$\begin{aligned} L^{-1}\mathscr{L}_\tau &= L^{-1}[L + \tau(\mathscr{L} - L)] \\ &= [E + \tau L^{-1}(\mathscr{L} - L)] = E + \tau A, \end{aligned}$$

其中

$$A = L^{-1}(\mathscr{L} - L),$$

E 为恒等算子．这样，算子 A 亦为巴氏空间 $B^{(n+2,\lambda)}$ 作用到本空间中的算子．这时，如果 A 有模，且

$$\tau\|A\| < 1,$$

即

$$\tau < \frac{1}{\|A\|},$$

那么，$E + \tau A$ 有逆算子

$$(L^{-1}\mathscr{L}_\tau)^{-1} = (E + \tau A)^{-1},$$

这时，根据 (3.7) 有

$$\begin{aligned} (L^{-1}\mathscr{L}_\tau)^{-1}(L^{-1}\mathscr{L}_\tau)u &= Eu = u \\ &= (L^{-1}\mathscr{L}_\tau)^{-1}L^{-1}r, \end{aligned} \tag{3.8}$$

因而，积算子 $(L^{-1}\mathscr{L}_\tau)^{-1}L^{-1}$ 建立了由 $r \in R$ 到 $u \in B^{(n+2,\lambda)}$

的对应，它即为所求的 $\mathscr{L}_\tau$ 的逆算子：

$$\mathscr{L}_\tau^{-1} = (L^{-1}\mathscr{L}_\tau)^{-1}(L^{-1}) = (E + \tau A)^{-1}(L^{-1}). \quad (3.9)$$

$\|A\|$ 为有限量的证明暂放在稍后一些时候进行，现在继续研究我们的课题.

如果 $\|A\| < 1$，那么，就可取 $\tau = 1$，因而，在此情况下，我们的课题顺利地解决了.

如果 $\|A\| \geqslant 1$，那么，还得设法沿参数 τ 继续拓展 $\mathscr{L}_\tau$ 的逆算子.

现设 $\|A\| \geqslant 1$，$\tau_1 < \dfrac{1}{\|A\|} \leqslant 1$ 为某常数．根据上面的讨论，我们可以把 $\mathscr{L}_\tau$ 的逆算子由 $\tau = 0$ 沿参数 τ 拓展到 $\tau = \tau_1$，即证明 $\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}$ 存在．为了继续沿参数向前拓展 $\mathscr{L}_\tau^{-1}$，再引入带参数 τ_2 的算子 $\mathscr{L}_{\tau_2}$：

$$\mathscr{L}_{\tau_2} = L + \tau_2(\mathscr{L} - L) = \mathscr{L}_{\tau_1} + (\tau_2 - \tau_1)(\mathscr{L} - L).$$

由 (3.9) 知，$\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}$ 存在．因而，可以讨论积算子

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}\mathscr{L}_{\tau_2} &= \mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}[\mathscr{L}_{\tau_1} + (\tau_2 - \tau_1)(\mathscr{L} - L)] \\ &= E + (\tau_2 - \tau_1)\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}(\mathscr{L} - L) \\ &= E + (\tau_2 - \tau_1)A_1,\end{aligned}$$

其中

$$A_1 = \mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}(\mathscr{L} - L).$$

由于 $\mathscr{L} - L$ 由 $B^{(n+2,\lambda)}$ 作用到 R，而 $\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}$ 由 R 作用到 $B^{(n+2,\lambda)}$，所以，同算子 A 一样，A_1 也是一个由 $B^{(n+2,\lambda)}$ 作用到本空间中的算子．如果 A_1 有模，那么，根据压缩映象原理的推论知，当

$$(\tau_2 - \tau_1)\|A_1\| < 1$$

时，$E + (\tau_2 - \tau_1)A_1$ 有逆算子，因之，逆算子

$$(\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}\mathscr{L}_{\tau_2})^{-1} = [E + (\tau_2 - \tau_1)A_1]^{-1}$$

存在．这时，对任给 $u \in B^{(n+2,\lambda)}$ 有

$$\mathscr{L}_{\tau_2}u = r \in R,$$

而

$$\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}\mathscr{L}_{\tau_2}u = \mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}r \in B^{(n+2,\lambda)},$$

所以，

$$[E + (\tau_2 - \tau_1)A_1]^{-1}\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}r = (\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}\mathscr{L}_{\tau_2})^{-1}\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}r$$
$$= (\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}\mathscr{L}_{\tau_2})^{-1}(\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}\mathscr{L}_{\tau_2})u = Eu = u,$$

因而，

$$[E + (\tau_2 - \tau_1)A_1]^{-1}\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1} = \mathscr{L}_{\tau_2}^{-1}$$

为所求的 $\mathscr{L}_{\tau_2}$ 的逆算子.

如果 A 和 A_1 的模均小于同一个常数 C，那么，我们就可取 $\tau_2 = \tau_1$，因而，使 $\mathscr{L}_\tau$ 的逆算子沿参数由 τ_1 拓展到了 $\tau_2 = 2\tau_1$. 若 $\tau_1 > \frac{1}{2}$，则可取 $\tau_2 = 1$，因而，我们的课题又告解决. 如果 $\tau_1 \leqslant \frac{1}{2}$，则记 $\left[\frac{1}{\tau_1}\right]$ 为 $\frac{1}{\tau_1}$ 的整数部分. 这时，只要连续重复上面的讨论 $1 + \left[\frac{1}{\tau_1}\right]$ 次，最终总可以把 $\mathscr{L}_\tau$ 的逆算子拓展到 $\tau = 1$ 的情形.

综上所述，如果 A 和 A_1 有模，并且，$\|A\|$ 和 $\|A_1\|$ 小于同一个常数 C，那么，我们就可沿参数 τ 拓展逆算子 $\mathscr{L}_\tau^{-1}$ 到 $\tau = 1$.

现在，我们用“微分方程的语言”来寻找这个常数 C.

首先，根据前节先验估值 (2.24) 来建立 $\|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}}$ 与 $\|\mathscr{L}_\tau u\|_R$ 的关系.

算子 $\mathscr{L}_\tau$ 是由第一边值问题 (III) 所确定的：对于任给的函数 $u \in B^{(n+2,\lambda)}$，按 (3.5)、(3.2) 和 (3.3) 确定四个函数 f_τ，φ，χ_1 和 χ_2，它们成为空间 R 中的一个元素. 这时，方程(3.5) 为

$$\mathscr{L}_\tau u = [\tau a(x,t)u_{xx} + (1-\tau)u_{xx}] - u_t$$

$$= a_\tau(x, t)u_{xx} - u_t = f_\tau(x, t),$$

由于 $0 \leqslant \tau < 1$, $a \geqslant a_0$, $a_0 < 1$, 所以,

$$a_\tau(x, t) = \tau a(x, t) + (1 - \tau) \geqslant \tau a_0 + (1 - \tau)$$
$$\geqslant a_0 + (\tau - 1)(a_0 - 1) \geqslant a_0;$$

类似地,

$$a_\tau(x, t) \leqslant \tau A_0 + (1 - \tau)$$
$$\leqslant A_0 + (A_0 - 1)(\tau - 1) \leqslant A_0.$$

因而，依上一节中的讨论，对于问题 (III) 下述先验估值成立:

$$\|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}} \leqslant c_1 \|\mathscr{L}_\tau u\|_R, \tag{3.10}$$

其中 c_1 为某常数，与 u 无关，而且，估值 (3.10) 对所有的 $\tau(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ 一致地成立.

其次,不难直接验证,对任给 $u \in B^{(n+2,\lambda)}$ 而言,

$$\|(\mathscr{L} - L)u\|_R = \|\mathscr{L}u - Lu\|_R$$
$$= \|(a(x, t) - 1)u_{xx}\|_{B^{(n,\lambda)}} \leqslant c_2 \|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}}, \tag{3.11}$$

其中 c_2 为某常数,与 u 无关.

现在,依据 (3.10) 和 (3.11) 证明，算子 A 和 A_1 均有模，并且,它们的模均小于同一个常数.

事实上,任取 $u \in B^{(n+2,\lambda)}$, 并记

$$Au = L^{-1}(\mathscr{L} - L)u = v,$$

则
$$(\mathscr{L} - L)u = Lv.$$

根据 (3.10) (取 $\tau = 0$), 有:

$$\|v\|_{B^{(n+2,\lambda)}} \leqslant c_1 \|Lv\|_R \leqslant c_1 \|(\mathscr{L} - L)u\|_R;$$

又根据 (3.11), 有:

$$\|v\|_{B^{(n+2,\lambda)}} \leqslant c_1 \|(\mathscr{L} - L)u\|_R \leqslant c_1 c_2 \|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}}.$$

这样,

$$\sup \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \sup \frac{\|v\|}{\|u\|} \leqslant c_1 c_2.$$

因此，$\|A\|$ 存在，且

$$\|A\| \leqslant c_1c_2 = c; \tag{3.12}$$

另一方面，任取 $u_1 \in B^{(n+2,\lambda)}$，并记

$$A_1u_1 = \mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}(\mathscr{L} - L)u_1 = v_1,$$

则

$$(\mathscr{L} - L)u_1 = \mathscr{L}_{\tau_1}v_1.$$

根据先验估值 (3.10) (取 $\tau = \tau_1$)，有

$$\|v_1\|_{B^{(n+2,\lambda)}} \leqslant c_1\|\mathscr{L}_{\tau_1}v_1\|_R = c_1\|(\mathscr{L} - L)u_1\|_R.$$

因而，依 (3.11)，又可写

$$\|v_1\|_{B^{(n+2,\lambda)}} \leqslant c_1\|(\mathscr{L} - L)u_1\|_R$$
$$\leqslant c_1c_2\|u_1\|_{B^{(n+2,\lambda)}}.$$

所以，A_1 有模，并且，

$$\|A_1\| \leqslant c_1c_2 = c. \tag{3.13}$$

(3.12) 和 (3.13) 说明，A 和 A_1 均为有模算子，而且，它们的模同小于一个常数 c.

至此，我们证明了：对任何参数 $\tau(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ 而言，问题 (III) 均有属于 $B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 的光滑解，因而，问题 (I) 的光滑解是存在的.

在上述讨论过程中，为了方便，才限制 $a_0 < 1$，$A_0 > 1$；当这个条件不成立时，可用 $a_0' = \dfrac{a_0}{[a_0] + 1}$、$A_0' = A_0\left(\left[\dfrac{1}{A_0}\right] + 1\right)$代替 a_0 和 A_0.

从上述讨论过程中可以看出，如果代替方程 (3.1)，讨论一般变系数抛物型方程

$$a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u - u_t = f(x, t),$$

估值 (3.13) 仍成立． 此时，假定 $b(x, t)$ 和 $c(x, t)$ 同属于 $B^{(n,\lambda)}(\bar{g})$ 类，且 $c(x, t) < 0$.

估值 (3.13) 不仅对于第一边值问题是正确的，而且，对

于第二或第三边值问题也是有效的.

我们把本节中所得到的结论综合写为下面的定理.

§2 变系数抛物型方程边值问题的光滑解存在定理

定理(变系数抛物型方程的光滑解存在定理) 设在平面 (x, t) 上有两条不相交的曲线 S_1 和 S_2(S_i: $\chi = \psi_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $i = 1,2$),它们与二直线 $t = 0$ 和 $t = T$ 所界的曲边梯形区域记为 g:

$$\bar{g} = \{(x, t)\ \psi_1(t) \leqslant x \leqslant \psi_2(t), \quad t \in \bar{I} = [0, T]\}.$$

在区域 g 内讨论下述变系数抛物型方程的边值问题:

$$(\text{IV})\begin{cases} \mathscr{L}u = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u - u_t \\ \qquad = f(x, t), \qquad (x, t) \in g; \qquad (3.14) \\ u(x, 0) = \varphi(x), \ x \in k = \{x, \psi_1(0) < x < \psi_2(0)\}; \\ \qquad\qquad (3.2) \\ u|_{S_i} = \chi_i(t), (\text{第一边值问题})\ i = 1, 2, t \in I; \ (3.3) \\ \text{或}(u_x + \alpha_i(t)u)|_{S_i} = \chi_i(t), \quad i = 1, 2, t \in I; \ (3.3') \\ \left(\begin{array}{l}\text{当 } \alpha_i \equiv 0 \text{ 时为第二边值问题;} \\ \text{当 } \alpha_i \not\equiv 0 \text{ 时为第三边值问题.}\end{array}\right) \end{cases}$$

假定成立下述条件 A:

1) $n \geqslant 0$, $0 < \lambda \leqslant 1$, 当 n 为偶数时, S_i 属于 $C^{(\frac{n}{2}+1, \frac{\lambda}{2})}$ 类; 当 n 为奇数时, S_i 属于 $C^{(\frac{n+1}{2}, \frac{1+\lambda}{2})}$ 类, $i = 1, 2$;

2) $a(x, t)$、$b(x, t)$ 和 $c(x, t)$ 均属于 $B^{(n, \lambda)}(\bar{g})$ 类, $A_0 \geqslant a(x, t) \geqslant a_0 > 0$, $c(x, t) < 0$;

3) $f(x, t)$ 属于 $B^{(n, \lambda)}(\bar{g})$类;

4) $\varphi(x)$ 属于 $C^{(n+2, \lambda)}(\bar{k})$ 类;

5) 对于第一边值问题而言, 当 n 为偶数时, $\chi_i(t)$属于 $C^{(\frac{n}{2}+1, \frac{\lambda}{2})}(\bar{I})$ 类, 当 n 为奇数时, $\chi_i(t)$ 属于 $C^{(\frac{n+1}{2}, \frac{1+\lambda}{2})}(\bar{I})$

类；$i=1, 2$；

对于第二、第三边值问题而言，当 n 为偶数时，$\chi_i(t)$ 和 $\alpha_i(t)$属于 $C^{(\frac{n}{2}, \frac{1+\lambda}{2})}(\bar{I})$ 类，当 n 为奇数时，它们属于 $C^{(\frac{n+1}{2}, \frac{\lambda}{2})}(\bar{I})$ 类；同时，对第三边值问题而言，$\alpha_1>0$, $\alpha_2<0$；

6) 问题 (IV) 在 $B^{(n+2, \lambda)}(\bar{g})$ 类中是协调的，即在点 $(\phi_i(0), 0)$ $(i=1, 2)$ 处成立问题 (IV) 的所有协调条件.

当条件 A 成立时，问题 (IV) 有唯一的属于 $B^{(n+2, \lambda)}(\bar{g})$ 的光滑解 $u(x, t)$，同时，

$$\|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})}=O(\|f\|+\|\varphi\|+\|\chi_1\|+\|\chi_2\|), \quad (3.15)$$

(3.16) 右端中，要依被取模函数所在的函数空间分别取模，常数 O 只依赖于范数 $\|a\|$, $\|b\|$, $\|c\|$, $\|\alpha_1\|$ 及 $\|\alpha_2\|$, 常数 a_0, A_0 及 T 和区域 g，而与 u (因而与 f, φ 和 χ_1, χ_2) 无关.

我们上面所使用的证明方法也适用于某些非线性问题. 例如，对第一节中所讨论的边值问题 (VI) 而言，由于成立前节估值 (2.28)，故若对此问题还成立前节估值 (2.27) 时，则可采用上述参数拓展法证明，当前节注 3 中所列条件成立时，问题 (VI) 有属于 $B^{(n+2, \lambda)}(\bar{g})$ 的光滑解，并且，对这个解还成立估值 (3.15).

第三章　具有间断系数的抛物型方程

第一节　具有间断系数的热传导方程

在前面三章中，我们均讨论的是同一种介质中的各种热传导问题．在研究两种以上的介质中的传热现象时，要遇到具有间断系数的抛物型方程(见第一部分第一章)．

本节中，我们应用热势论的基本内容，研究带有间断系数的热传导方程的各种边值问题．

设 $S_j=\{(x,t),\ x=\psi_j(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 是 (x,t) 平面上三条不相交的曲线，$j=1,2,3$；

$$k_i=\{(x,0),x_i=\psi_i(0)\leqslant x\leqslant x_{i+1}=\psi_{i+1}(0)\}\quad(i=1,2)$$

是 x 轴上的两个相邻的区间；

$$g_i=\{(x,t),\quad \psi_i(t)<x<\psi_{i+1}(t),\quad 0<t<T\}\quad(i=1,2)$$

是 (x,t) 平面上相邻的两个开区域，并记

$$\bar g=\bar g_1+\bar g_2,\qquad \bar l=\{t,0\leqslant t\leqslant T\}.$$

在区域 g 内讨论带有间断系数的热传导方程的边值问题：

$$\begin{cases}L_1u_1=a_1u_{1xx}-u_{1t}=f_1(x,t), & (x,t)\in g_1; & (1.1)\\ L_2u_2=a_2u_{2xx}-u_{2t}=f_2(x,t), & (x,t)\in g_2; & (1.2)\\ u_i(x,0)=\varphi_i(x),\quad x\in k_i, & i=1,2; & (1.3)\\ u_1|_{s_{2-}}-u_2|_{s_{2+}}=\xi(t), & t\in l; & (1.4)\end{cases}$$

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
\delta_1(t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{S_{2-}} - \delta_2(t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{S_{2+}} = \zeta(t),\ t\in l; & (1.5)\\
\left[\alpha_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x} + \beta_j(t)u_i\right]\Big|_{S_j} = \chi_i(t), \qquad j = 2i-1, & \\
\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \qquad t\in l; & (1.6)
\end{cases}
$$

其中 $a_i > 0$，$i = 1, 2$；S_{2-} 和 S_{2+} 表示极限值分别由区域 g_1 和 g_2 方面取. (1.3) 称为初始条件，(1.4) 和 (1.5) 统称为交界条件，(1.6) 称为边界条件. 当 $\alpha_j \equiv 0$，$\beta_j \equiv 1$ 时，称问题 (I) 为第一边值问题 ($j = 1, 3$)；当 $\alpha_j \equiv 1$，$\beta_j \equiv 0$ 时，(I) 称为第二边值问题；当 $\alpha_j \equiv 1$，$\beta_j \not\equiv 0$ 时称为第三边值问题.

为了确定问题 (I) 的解的涵义，特定义下述函数空间 $\bar{B}^{(n,\lambda)}$ ($n \geqslant 0$，$0 < \lambda \leqslant 1$). $\bar{B}^{(n,\lambda)}$ 中的元素 u 由两个函数组成，$u = (u_1, u_2)$，其中 u_i 属于 $B^{(n,\lambda)}(\bar{g}_i)$，$i = 1, 2$. 在定义

$$u + \bar{u} = (u_1 + \bar{u}_1, u_2 + \bar{u}_2)$$

和

$$au = (au_1, au_2)$$

后，$\bar{B}^{(n,\lambda)}$ 成一线性空间，其中还可引入范数：

$$\|u\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g})} = \|u_1\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g}_1)} + \|u_2\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g}_2)}, \qquad (1.7)$$

这时，$\bar{B}^{(n,\lambda)}$ 变为一赋范空间. 不难证明，$\bar{B}^{(n,\lambda)}$ 是一个完备空间，因而是个巴拿赫空间.

下面，定义问题 (I) 的古典解和光滑解.

问题 (I) 的古典解：若 $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$ 属于 $\bar{B}^{(1,\lambda)}(\bar{g})$ 类，($0 < \lambda \leqslant 1$)，并且，u_1 在区域 g_1 内满足方程 (1.1)，u_2 在区域 g_2 内满足方程 (1.2)，此外，u_1 和 u_2 还满足问题 (I) 的其它诸条件 (1.3)—(1.6)，则称 $u = (u_1, u_2)$ 为问题 (I) 的古典解.

问题 (I) 的光滑解：当函数 $u(x, t)=(u_1(x, t), u_2(x, t))$ 属于 $\bar{B}^{(n,\lambda)}(\bar{g})$ 类，$n \geqslant 2$，$0 < \lambda \leqslant 1$，并满足问题 (I) 的所

有条件时,称其为问题(I)的光滑解.

现在,我们同时寻找问题(I)的古典解与光滑解. 我们的任务是给出求解的方法,而不在减弱解存在的条件上花费过多的笔墨.

今后,为叙述方便起见,我们先只以第二边值问题做为典型例子进行讨论,即假定(1.6)中 $\alpha_i \equiv 1$, $\beta_i \equiv 0$,同时,还先假定 $\delta_1 \equiv \delta_2 \equiv 1$.

问题(I)可用下述方法简化之.

以

$$G_i(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2a_i\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_i^2(t-\tau)}}$$

表示热传导方程

$$L_i u = 0$$

的基本解. 在引入面热势

$$U_i[f_i] = \iint_{g_i} G_i f_i d\xi d\tau, \qquad (i = 1, 2)$$

以后,可只讨论(1.1)及(1.2)为齐次方程的情形.

适当拓展始值函数 $\varphi_i(x)$ 后,可引用泊阿松积分

$$Z_i[\varphi_i] = \int_{-\infty}^{\infty} G_i(x, t, \xi)\varphi_i(\xi)d\xi. \qquad (i = 1, 2)$$

此后,可只讨论(1.3)中的 $\varphi_i \equiv 0$ 的情形($i = 1, 2$).

设

$$w_i = u_i - U_i - Z_i, \qquad i = 1, 2, \tag{1.8}$$

则 w_i 满足下述带有间断系数的齐次热传导方程的边值问题(II):

$$\begin{cases} L_1 w_1 = a_1 w_{1xx} - w_{1t} = 0, & (x, t) \in g_1; & (1.9) \\ L_2 w_2 = a_2 w_{2xx} - w_{2t} = 0, & (x, t) \in g_2; & (1.10) \\ w_i(x, 0) = 0, \quad x \in k_i, & i = 1, 2; & (1.11) \end{cases}$$

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}[w]=w_1|_{s_{2-}}-w_2|_{s_{2+}}=\xi(t), & t\in l;\ (1.12)\\ \left[\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]=\dfrac{\partial w_1}{\partial x}\Big|_{s_{2-}}-\dfrac{\partial w_2}{\partial x}\Big|_{s_{2+}}=\zeta(t), & t\in l;\ (1.13)\\ \dfrac{\partial w_i}{\partial x}\Big|_{s_j}=\bar{\chi}_i(t),\quad j=2i-1,\quad i=1,2, & \\ & t\in l;\ (1.14)\end{cases}
$$

上面的 ζ、ξ 和 $\bar{\chi}_i$ 可按关系式 (1.8) 由问题 (I) 的条件 (1.4) (1.5) 及 (1.6) 经计算后决定.

我们设法将问题 (II) 的解写成单层热势之和的形式:

$$
w_i(x,t)=\sum_{j=i}^{i+1}\int_0^t G_i(x,\ t;\ \phi_j(\tau),\ \tau)\nu_{j+i-1}(\tau)d\tau
$$

$$
=\sum_{j=i}^{i+1}V_{j+i-1}[\nu_{j+i-1}],\qquad i=1,2.\quad (1.15)
$$

显然, 由 (1.15) 所确定的 $w=(w_1,\ w_2)$ 满足方程 (1.9)、(1.10) 及条件 (1.11). 为了使其满足问题 (II) 的其它条件, 根据跃度公式(见第一部分第二章 (3.7)), 列出密度 ν_i ($i=1$, 2, 3, 4) 所满足的积分方程组. 按 (1.12) 写出

$$
\sum_{j=1}^{2}\int_0^t G_1(\phi_2(t),\ t;\ \phi_j(\tau),\ \tau)\nu_j(\tau)d\tau
$$

$$
-\sum_{j=1}^{2}\int_0^t G_2(\phi_2(t),\ t;\ \phi_{j+1}(\tau),\ \tau)\nu_{j+2}(\tau)d\tau=\xi(t);
$$

按 (1.13) 写出

$$
\int_0^t\frac{\partial G_1(\phi_2(t),\ t;\ \phi_1(\tau),\ \tau)}{\partial x}\nu_1(\tau)d\tau
$$

$$
+\int_0^t\frac{\partial G_1(\phi_2(t),\ t;\ \phi_2(\tau),\ \tau)}{\partial x}\nu_2(\tau)d\tau
$$

$$
+\frac{\nu_2(t)}{2}-\int_0^t\frac{\partial G_2(\phi_2(t),\ t;\ \phi_2(\tau),\ \tau)}{\partial x}\nu_3(\tau)d\tau
$$

$$+\frac{\nu_3(t)}{2}-\int_0^t \frac{\partial G_2(\phi_2(t),t;\phi_3(\tau),\tau)}{\partial x}\nu_4(\tau)d\tau$$

$$=\zeta(t);$$

按(1.14)写出

$$\int_0^t \frac{\partial G_1(\phi_1(t),t;\phi_1(\tau),\tau)}{\partial x}\nu_1(\tau)d\tau-\frac{\nu_1(t)}{2}$$

$$+\int_0^t \frac{\partial G_1(\phi_1(t),t;\phi_2(\tau),\tau)}{\partial x}\nu_2(\tau)d\tau=\overline{\chi}_1(t);$$

$$\int_0^t \frac{\partial G_2(\phi_3(t),t;\phi_2(\tau),\tau)}{\partial x}\nu_3(\tau)d\tau$$

$$+\int_0^t \frac{\partial G_2(\phi_3(t),t;\phi_3(\tau),\tau)}{\partial x}\nu_4(\tau)d\tau$$

$$+\frac{\nu_4(t)}{2}=\overline{\chi}_2(t);$$

上面诸式即为:

$$\text{(III)}\begin{cases} V_{12}[\nu_1]+V_{22}[\nu_2]-V_{32}[\nu_3]-V_{42}[\nu_4]=\xi; & (1.16)\\ \dfrac{\partial V_{12}[\nu_1]}{\partial x}+V_{2st}[\nu_2]+\dfrac{\nu_2}{2}+\dfrac{\nu_3}{2}-V_{3st}[\nu_3] & \\ \qquad+\dfrac{\partial V_{42}[\nu_4]}{\partial x}=\zeta; & (1.17)\\ V_{1st}[\nu_1]-\dfrac{\nu_1}{2}+\dfrac{\partial V_{21}[\nu_2]}{\partial x}=\overline{\chi}_1; & (1.18)\\ \dfrac{\partial V_{33}[\nu_3]}{\partial x}+V_{4st}[\nu_4]+\dfrac{\nu_4}{2}=\overline{\chi}_2; & (1.19)\end{cases}$$

其中当 $i=1,2$ 时，$V_{ist}[\nu_i]$ 表示单层热势 $V_i[\nu_i]$ 对 x 的导数在 S_i 上的直接值；当 $i=3,4$ 时，$V_{ist}[\nu_i]$表示单层热势 $V_i[\nu_i]$ 对 x 的导数在 S_{i-1} 上的直接值；（见第一部分第六章）$V_{i2}[\nu_i]$ 表示单层热势 $V_i[\nu_i]$ 在 S_2 上的值，$\dfrac{\partial V_{ij}[\nu_i]}{\partial x}$ 表示单层热势 $V_i[\nu_i]$ 对 x 的导数在 S_j 上的值。

积分方程组 (III) 中除 (1.16) 外均为第二类型沃尔泰拉方程，(1.16) 是第一类型的沃氏积分方程.

利用本部分第一章第一节注 4 中所介绍的方法，可以把它变换为第二类型的沃氏方程

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2a_1}[\nu_1+\nu_2]-\frac{\sqrt{\pi}}{2a_2}[\nu_3+\nu_4]$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_\tau^t\frac{G_1(\phi_2(y),y;\phi_j(\tau),\tau)}{\sqrt{t-y}}dy\right]\nu_j(\tau)d\tau$$
$$-\sum_{j=2}^{3}\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_\tau^t\frac{G_2(\phi_2(y),y;\phi_j(\tau),\tau)}{\sqrt{t-y}}dy\right]\nu_{j+1}(\tau)d\tau$$
$$=\frac{d}{dt}\left[\int_0^t\frac{\bar{\xi}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right]. \tag{1.20}$$

根据积分方程理论，当 $S_i(i=1,2,3)$ 为一次连续可微曲线，ζ，$\bar{\xi}$ 和 $\bar{\chi}_i(i=1,2)$ 为连续函数时，由 (1.17)，(1.18)，(1.19) 及 (1.20) 所组成的积分方程组有唯一的一组连续解 $(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)$，而且，

$$\nu_0=\sum_{i=1}^{4}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\nu_i(t)|=O(\zeta_0+\bar{\xi}_0+\bar{\chi}_0), \tag{1.21}$$

其中

$$\zeta_0=\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\zeta(t)|,\ \bar{\xi}_0=\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\bar{\xi}(t)|,$$
$$\bar{\chi}_0=\sum_{i=1}^{2}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\bar{\chi}_i(t)|.$$

把所得到的这组解代入 (1.15) 后，即可得到问题 (II) 的解.

为了研究解 (1.15) 的光滑性，首先要研究积分方程组的解(即 (1.15)中诸热势的密度)的光滑性，为此，要使用热势直接值的增滑作用，以及 (1.20) 中所含日伏列积分 (它们含有密度 ν_2 和 ν_3) 的增滑作用(见第一部分第六章). 这时，函数

$\zeta(t)$、$\xi(t)$ 及 $\chi_i(t)$ 的光滑性依 (1.4)、(1.5)、(1.6) 及 (1.8) 决定，同时，在考虑 (1.8) 时，要应用有关面热势的光滑性定理及有关波阿松积分的光滑性定理. (见第一部分第五章)此后，再利用单层热势的光滑性定理，可以确定问题 (II) 的解的光滑性. (见第一部分第五章)为节省篇幅起见，我们不一一详细讨论了.

这里，综合上面的分析，我们仅写出问题 (I) 的古典解和光滑解存在的条件.

设成立下述条件 D:

1) 诸曲线 S_i 属 $C^{(1)}$ 类，$i=1,2,3$;

2) $f_i(x,t)$ 在 g_i 内连续，对 x 或对 t 满足指数大于零的正则条件;

3) $\varphi_i(x)$ 在 $\bar{k}_i$ 内属于 $C^{(1,\lambda)}$ 类，$i=1,2$，$0<\lambda\leqslant 1$;

4) 当问题 (I) 为第一边值问题时，$\chi_i(t)$ 在 $\bar{l}$ 内属于 $C^{(0,\frac{1+\lambda}{2})}$ 类；当 (I) 为第二边值问题时，$\chi_i(t)$ 属 $C^{(0,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})$类；当 (I) 为第三边值问题时，$\beta_j(t)$ 及 $\chi_i(t)$ 均属于 $C^{(0,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})$ 类，$i=1,2$，$j=1,3$，$\beta_1\leqslant 0$，$\beta_3\geqslant 0$;

5) $\xi(t)$ 在 $\bar{l}$ 内属于 $C^{(0,\frac{1+\lambda}{2})}$ 类;

6) $\zeta(t)$ 和 $\delta_i(t)$ 在 $\bar{l}$ 内属于 $C^{(0,\frac{\lambda}{2})}$ 类，$i=1,2$，并且，当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，

$$\delta_1\delta_2>0 \tag{1.22}$$

7) 问题 (I) 在 $\bar{B}^{(1,\lambda)}$ 内是协调的，即在边界点和交介点 $(\psi_i(0),0)$ $(i=1,2,3)$ 处，成立所有必要的协调条件.

当条件 D 成立时，问题(I)有唯一的古典解 $u\in\bar{B}^{(1,\lambda)}(g)$[1],

1) 在下一节中，我们再详细地讨论解的唯一性问题. 从估值 (1.23) 亦可推出问题 (I) 的解是唯一的.

并且，

$$\|u\|_{B^{(1,\lambda)}(\bar{g})}=O(f_0+\sum\|\varphi_i\|+\sum\|\chi_i\| \\ +\|\zeta\|+\|\xi\|), \quad (1.23)$$

其中右端的各个模数均需依据被取模函数所在的相应的函数空间决定，同时，右端的常数 O 与 u 无关，

$$f_0=\sum_{i=1}^{2}\max_{\bar{g}_i}|f_i(x,t)|.$$

设成立下列条件 E:

1）当 $n\geqslant 0$ 为偶数时，S_i 属于 $C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}$ 类；当 n 为奇数时，S_i 属于 $C^{(\frac{n+1}{2},\frac{1+\lambda}{2})}$ 类，$i=1,2,3$，$0<\lambda\leqslant 1$；

2）$f_i(x,t)$ 在 $\bar{g}_i$ 内属于 $B^{(n,\lambda)}$ 类，$i=1,2$；

3）$\varphi_i(x)$ 在 $\bar{k}_i$ 内属于 $C^{(n+2,\lambda)}$ 类，$i=1,2$；

4）对第一边值问题 (I) 而言，当 n 为偶数时，$\chi_i(t)$ 在 $\bar{l}$ 内属于 $C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}$ 类，当 n 为奇数时，$\chi_i(t)$ 属于 $C^{(\frac{n+1}{2},\frac{1+\lambda}{2})}(\bar{l})$ 类；对第二和第三边值问题 (I) 而言，当 n 为偶数时，$\beta_j(t)$ 和 $\chi_i(t)$ 均属于 $C^{(\frac{n}{2},\frac{1+\lambda}{2})}$ 类，当 n 为奇数时，β_j 和 χ_i 属于 $C^{(\frac{n+1}{2},\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})$ 类，$i=1,2$，$j=2i-1$，并且，$\beta_1\leqslant 0$，$\beta_3\geqslant 0$；

5）当 n 为偶数时，$\zeta(t)$ 在 $\bar{l}$ 内属于 $C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}$ 类，当 n 为奇数时，$\zeta(t)$ 属于 $C^{(\frac{n+1}{2},\frac{1+\lambda}{2})}(\bar{l})$ 类；

6）当 n 为偶数时，$\delta_i(t)$ 和 $\zeta(t)$ 在 $\bar{l}$ 内属于 $C^{(\frac{n}{2},\frac{1+\lambda}{2})}$ 类，当 n 为奇数时，它约属于 $C^{(\frac{n+1}{2},\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})$ 类，$i=1,2$，并且，当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，

$$\delta_1\delta_2>0$$

7）问题 (I) 在 $\bar{B}^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 中是协调的，即在 $\bar{B}^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 中讨论 (I) 时，在 $(\psi_i(0),0)$ $(i=1,2,3)$ 处存在 f_i，φ_i，ξ，

ζ 及 χ_i 间的所有必要的协调关系式.

当条件 E 成立时，问题 (I) 有唯一的属于 $\bar{B}^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 的光滑解 $u=(u_1, u_2)$，而且

$$\|u\|_{\bar{B}^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})}=O\left(\sum_{i=1}^{2}\|f\|_{B^{(n,\lambda)}(\bar{g}_i)}+\|\xi\|+\|\zeta\|\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{2}\|\varphi_i\|_{C^{(n+2,\lambda)}(\bar{\lambda}_i)}+\sum_{i=1}^{2}\|\chi_i\|\right), \qquad (1.24)$$

其中右端的模数 $\|\xi\|$, $\|\zeta\|$ 和 $\|\chi_i\|$ 要依 n 的奇偶性根据条件 E 决定，同时，右端的 O 与 u 无关.

注 1 当在半平面 $t\geqslant 0$ 上有 m 个相邻的曲边梯形时，仍可讨论上述诸边值问题，此时的交界条件可有 $2(m-1)$ 个.

注 2 亦可讨论各种混合边值问题，即在 $\bar{g}$ 的侧边上给出的是不同类型的边界条件.

第二节 具有间断系数的抛物型方程

回顾一下我们在研究具有光滑(变)系数抛物型方程时所走过的道路，可以发现，依我们所建立的理论系统和所使用的讨论方法而言，具有间断系数的抛物型方程与光滑系数方程相比较，并不提出什么新的实质性困难，也就是说，那些研究光滑系数的方程的方法，基本上也适用于系数间断的情形．这里，我们简单回忆一下我们所走过的道路，对今后的研究是非常有益的.

最初，我们详细地研究了各种热势的性质，并且，应用热势论的基础结果建立了热传导方程的 B 估值；其次，依靠函数空间 $C^{(n,\lambda)}$ 和 $B^{(n,\lambda)}$ 中诸内插公式，建立了变系数抛物型方程的先验估值；最后，在先验估值的基础上，根据压缩映象原理，运用参数拓展法证明了一般抛物型方程光滑解存在定理.

本节中，我们仍沿上述顺序逐步深入研究具有间断系数的抛物型方程；但是，那些既适用于光滑系数、又适用间断系数的推导过程和证明，我们均不予重复，而仅仅指出在使用这些推导和证明时应注意的事项.

§1 具有间断系数的抛物型方程的光滑解

在 g 中讨论具有间断（变）系数的抛物型方程的边值问题：

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
L_1u_1 = a_1(x,t)\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = f_1(x,t), \quad (x,t)\in g_1; & (2.1)\\
L_2u_2 = a_2(x,t)\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = f_2(x,t), \quad (x,t)\in g_2; & (2.2)\\
u_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad i=1,2, \quad x\in k_i; & (2.3)\\
[u]|_{s_2} = u_1|_{s_{2-}} - u_2|_{s_{2+}} = \xi(t), \quad t\in l; & (2.4)\\
\left[\delta\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]\Big|_{s_2} = \delta_1(t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{s_{2-}} - \delta_2(t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{s_{2+}} = \zeta(t), \quad t\in l; & (2.5)\\
l_ju_i = \left[\alpha_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x} + \beta_j(t)u_i\right]\Big|_{s_j} = \chi_i(t), \; j=2i-1, \; i=1,2, \quad t\in l; & (2.6)
\end{cases}
$$

其中 $A_0 \geqslant a_i(x,t) \geqslant a_0 > 0$.

为了获得问题 (I) 的光滑解，即属于 $\bar{B}^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})(n\geqslant 0, 0<\lambda\leqslant 1)$ 的解，首先指出，上一节所建立的估值 (1.23) 可以理解为先验估值，即任取两个函数 $u_i\in B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g}_i)$，$(i=1,2)$ 将它们代入到方程 (2.1) 和 (2.2) 左端后，得到两个函数 $f_i(x,t)$，而当 $t=0$ 时，u_i 取值为 $\varphi_i(x)$，并且，将其代入 (2.4)，(2.5) 及 (2.6) 左端时，相应地得到 $\xi(t)$，$\zeta(t)$ 和

$\chi_i(t)$, $i=1, 2$. 这时，$u=(u_1, u_2)$ 在 $\bar{B}^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 中的模与上述诸函数在相应的函数空间中的模满足估值 (1.24).

在先验估值 (1.24) 的基础上，使用上一章第一节中的方法(即先讨论 $a_i(x, t)$ 满足小振幅条件的情形，然后再讨论一般情形)，可以获得问题 (I) 的如下的先验估值：

$$\|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})}=O(\|f\|+\|\varphi\|+\|\xi\|+\|\zeta\| + \|\chi\|+u_0), \tag{2.7}$$

其中

$$u_0=\sum_{i=1}^{2}\max_{\bar{g}_i}|u_i(x, t)|,$$

并且，右端诸模数要依被取模函数所在函数空间而定.

为了在先验估值 (2.7) 的基础上对问题 (I) 使用参数拓展法，需要进一步求得 u_0 的先验估值.

在下一段中，我们证明，对问题 (I) 的属于 $\bar{B}^{(2,\lambda)}(\bar{g})$ 的解成立下述先验估值：

$$u_0=O\Big(\sum_{i=1}^{2}\|f_i\|_{B^{(0,\lambda)}(\bar{g}_i)}+\sum_{i=1}^{2}\|\varphi_i\|_{C^{(2,\lambda)}(\bar{k}_i)} + \|\xi\|_{C^{(1,\frac{\lambda}{2})}(I)}+\|\zeta\|_{C^{(0,\frac{1+\lambda}{2})}(I)}+\sum_{i=1}^{2}\|\chi_i\|_{C^{(1,\frac{\lambda}{2})}(I)}\Big), \tag{2.8}$$

其中右端的 O 与 u 无关.

把 u_0 的估值 (2.8) 代入 (2.7) 后，我们得到问题(I)的先验估值：

$$\|u\|_{B^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})}=O(\|f\|+\|\varphi\|+\|\xi\| + \|\zeta\|+\|\chi\|). \tag{2.9}$$

根据这个先验估值，再应用参数拓展法和压缩映象原理，就可以证明问题 (I) 有光滑解. 这里，我们不一一

重复了．我们仅指出所需要使用的函数空间及引入参数的方法．

函数空间 $\bar{R}$ 的每个元素 r 由 8 个函数构成：

$$r = \{f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, \xi, \zeta, \chi_1, \chi_2\},$$

此处

$$f_i \in B^{(n,\lambda)}(\bar{g}_i),$$

$$\varphi_i \in C^{(n+2,\lambda)}(\bar{k}_i), \qquad (i = 1, 2);$$

当 n 为偶数时，$\xi \in C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})$， $\zeta \in C^{(\frac{n}{2},\frac{1+\lambda}{2})}(\bar{l})$；

当 n 为奇数时，$\xi \in C^{(\frac{n+1}{2},\frac{1+\lambda}{2})}(\bar{l})$，$\zeta \in C^{(\frac{n+1}{2},\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})$；

对第一边值问题而言，当 n 为偶数时，$\chi_i \in C^{(\frac{n}{2}+1,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})$，

当 n 为奇数时，$\chi_i \in C^{(\frac{n+1}{2},\frac{1+\lambda}{2})}(\bar{l})$；

对第二、三边值问题而言，当 n 为偶数时，$\chi_i \in C^{(\frac{n}{2},\frac{1+\lambda}{2})}(\bar{l})$，

当 n 为奇数时，$\chi_i \in C^{(\frac{n+1}{2},\frac{\lambda}{2})}$．

同系数光滑时一样，在 $\bar{R}$ 中适当引入加法和数乘运算，并定义范数后，$\bar{R}$ 便成为一个巴拿赫空间．

由问题 (I) 所确定的算子 $\mathscr{L}$（具有间断系数的抛物型算子）在 $\bar{B}^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 和 $\bar{R}$ 间工作。当方程 (2.1) 和 (2.2) 为热传导方程时，记$\mathscr{L}$为 L（具有间断系数的热传导算子）．由于上一节的结果，L 的逆算子 L^{-1} 存在，因此，引入带参数的算子

$$\mathscr{L}_\tau = (1-\tau)L + \tau\mathscr{L}$$

后，可以将 $\mathscr{L}_0 = L$ 的逆算子沿参数 τ 拓展到 $\tau = \tau_1 > 0$，然后，再由 τ_1 拓展到 $\tau_2 > \tau_1$．由于先验估值 (2.9)成立，有某不依于 τ 的 $\varepsilon > 0$ 存在，使

$$\tau_i - \tau_{i-1} > \varepsilon, \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots)$$

对所有的 i 均成立，因此，$\mathscr{L}_\tau$ 的逆算子可沿参数拓展到$\tau=1$，即 $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}$ 的逆算子 $\mathscr{L}^{-1}$ 存在，也就是说，问题 (I) 有光滑

解.

这里,我们把最终的结果写出来.

设成立下述条件 H:

1) 条件 E 中所有条件均成立(见本章第一节);

2) $a_i(x,t)\in B^{(n,\lambda)}(\bar{g}_i)$, $A_0\geqslant a_i(x,t)\geqslant a_0>0$, $i=1,2$, 而且,

$$\delta_1\delta_2>0$$

当条件 H 成立时, 问题(I)有唯一的属于 $\bar{B}^{(n+2,\lambda)}(\bar{g})$ 的光滑解 $u=(u_1,u_2)$, 而且, u 满足估值(2.9).

注 1 除上述两个区域中的间断系数问题外, 用我们的方法尚可讨论多个区域中的间断系数问题.

注 2 方程(2.1)、(2.2)中均可增加"低阶项",使其成为

$$L_iu=a_i(x,t)u_{xx}-u_t+b_i(x,t)u_x+c_i(x,t)u$$
$$=f_i(x,t),$$

只要 $c_i<0$, 则我们的方法仍然有效.

注 3 如同在本部分第三章第二节注 3 中所做的一样, 还可以讨论某些"具有间断系数的"拟线性抛物型方程的边值问题,即代替(2.1)(2.2)可讨论下面的拟线性方程:

$$L_iu=a_i(x,t,u,u_x)u_{xx}-u_t+G_i(u,u_x)=f_i(x,t),$$

在 a_i 和 G_i 满足某些条件时, 问题(I)仍有光滑解. (见第二部分第三章第二节注3)

§2 问题(I)的解的最大模的先验估计

现在证明估值(2.8). 我们假定下面的条件 M 成立:

1) $S_j\in C^{(1,\frac{\lambda}{2})}$, $j=1,2,3$, $0<\lambda\leqslant 1$;

2) $a_i(x,t)\in B^{(0,\lambda)}(\bar{g}_i)$, $A_0\geqslant a_i\geqslant a_0>0$, $i=1,2$;

3) $f_i(x,t)\in B^{(0,\lambda)}(\bar{g}_i)$, $i=1,2$;

4) $\varphi_i(x)\in C^{(2,\lambda)}(\bar{k}_i)$, $i=1,2$;

5) $\xi(t) \in C^{(1,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})$;

6) $\zeta(t) \in C^{(0,\frac{1+\lambda}{2})}(\bar{l})$, $\delta_i \in C^{(0,\frac{1+\lambda}{2})}(\bar{l})$, $\delta_1\delta_2 > 0$;

7) $\chi_i(t) \in C^{(1,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})$, $\beta_j(t) \in C^{(1,\frac{\lambda}{2})}(\bar{l})$, $j = 2i-1$, $i = 1, 2$, $\beta_1 \leqslant 0$, $\beta_3 \geqslant 0$;

8) 问题 (I) 在 $\bar{B}^{(2,\lambda)}(\bar{g})$ 中是协调的.

在条件M成立时，对于问题 (I) 的属于 $\bar{B}^{(2,\lambda)}(\bar{g})$ 的解 u 成立先验估值 (2.8).

证明:

首先指出，对于齐次的变系数抛物型方程 (2.1) 和 (2.2) 而言，在条件M成立时，在相应的区域 g_i 内，极值原理及极值点热流方向定理有效.

估值 (2.8) 的证明较长. 先讨论问题 (I) 中 f_i, φ_i, ξ 及 χ_i 均为零的情形，然后再讨论一般情形.

i) **引理 1** 设 $w = (w_1, w_2)$ 为下述带间断系数的抛物型方程边值问题 (II) 的属于 $\bar{B}^{(2,\lambda)}(\bar{g})$ 的解:

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}
L_1 w_1 = a_1(x,t)\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial w_1}{\partial t} = 0, & (x,t)\in g_1; \quad (2.10)\\
L_2 w_2 = a_2(x,t)\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial w_2}{\partial t} = 0, & (x,t)\in g_2; \quad (2.11)\\
w_i(x,0) = 0, & x\in k_i,\ i=1,2; \quad (2.12)\\
[w]\big|_{s_2} = 0, & t\in l; \quad (2.13)\\
\left[\delta\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]\Big|_{s_2} = \zeta(t), & t\in l; \quad (2.14)\\
l_j w_i\big|_{s_j} = 0,\quad j = 2i-1,\ i=1,2, & t\in l; \quad (2.15)
\end{cases}
$$

我们证明，对问题 (II) 的解 w 的最大模下述先验估值成立:

$$w_0 = \max_i \max_{\bar{g}} |w_i(x,t)| = O(\zeta_0 = \max_{0\le t\le T} |\zeta(t)|), \quad (2.16)$$

上式右端的 O 与 w 及 ζ 无关.

证明. 为证明估值 (2.16), 先在区域 $\bar{g}_2$ 内引入一个辅助函数 $z(x, t)$, 它是下面的第一边值问题 (III) 的解:

$$(\text{III})\begin{cases} a_2(x, t)z_{xx} - z_t = 0, & (x, t) \in g_2; \quad (2.17) \\ z|_{S_2} = z|_{S_3} = A, & t \in l; \quad (2.18) \\ z(x,0) = m(x) = Ae^{(x-\phi_2(0))(x-\phi_3(0))}, & x \in k_2; \quad (2.19) \end{cases}$$

其中 A 为某正常数.

不难验证,问题 (III) 的解在 $\bar{g}_2$ 有对 x 连续的导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$. 由于 $m(x) \leqslant A$, 且 $m(x)$ 只在 $(\phi_i(0), 0)$ 处取值 $A(i=2, 3)$, 因而,根据极值原理, $z(x, t)$ 在 S_2 和 S_3 上各点均取其在 $\bar{g}_2$ 中的正的最大值 A; 另一方面,由热流方向定理推出

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{S_2} < 0, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{S_3} > 0, \qquad (2.20)$$

然而, $\frac{\partial z}{\partial x}$ 在 S_2 和 S_3 上连续,且

$$\frac{\partial z(\phi_2(0),0)}{\partial x} = \frac{dm(\phi_2(0))}{dx} < 0,$$

$$\frac{\partial z(\phi_3(0),0)}{\partial x} = \frac{dm(\phi_3(0))}{dx} > 0.$$

所以,有常数 $\varepsilon > 0$ 存在,使

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{S_2} < -\varepsilon \qquad (2.21)$$

在 S_2 上处处成立,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{S_3} > \varepsilon \qquad (2.22)$$

在 S_3 上处处成立. 此外,由于 (2.20),

$$l_3 z|_{S_3} > 0. \qquad (2.23)$$

现在讨论问题 (II). 由条件 (2.13) 可见, $w_1(x,t)$ 与 $w_2(x,t)$ 在 S_2 上连续相接,因此,可定义区域 $\bar{g}$ 内的函数

$$w(x,t)=\begin{cases}w_1(x,t), & (x,t)\in\bar{g}_1;\\ w_2(x,t), & (x,t)\in\bar{g}_2.\end{cases}$$

显然,当 $\zeta\neq 0$ 时,在 $\bar{g}$ 内 $w\neq 0$. 不妨设 $w(x,t)$ 在 $\bar{g}$ 内有正的最大值. 由于 w_i 在 g_i 内分别满足齐次方程 (2.10) 和 (2.11), 从极值原理看出, w_i 在 $\bar{g}_i$ 上的正的最大值或在 $t=0$ 时或在 $S_j(j=1,2,3)$ 上达到. 从 (2.12) 可见, 这些最大值不可能在 $t=0$ 时达到; 另一方面,由于热流方向定理和 (2.15), 这些最大值不可能在 $S_j(j=1,3)$ 上达到. 因此, w_i 在 $\bar{g}_i$ 中的正的最大值在 S_2 上一定达到. 由于 $w(x,t)$ 在 $\bar{g}$ 内连续,显然,上述最大值就是 w 在 $\bar{g}$ 内的最大值.

讨论辅助函数

$$h(x,t)=D\zeta_0 z(x,t)-w_2(x,t), \qquad D=\frac{1}{\varepsilon\delta},$$

其中 δ 由条件 M 决定. 我们证明,在 $\bar{g}_2$ 内,

$$h(x,t)\geqslant 0. \tag{2.24}$$

我们用反反证法证明 (2.24). 倘若 (2.24) 不成立, 则必有一点 $p_0(x_0,t_0)\in\bar{g}_2$, 使 $h(x,t)$ 在 p_0 处达到其在 $\bar{g}_2$ 内的负的最小值. 然而,容易验证,在 g_2 内

$$a_2(x,t)h_{xx}-h_t=0.$$

所以,在 $\bar{g}_2$ 内对 $h(x,t)$ 极值原理成立. 又考虑到

$$h(x,0)=D\zeta_0 m(x)\geqslant 0,$$

知 $h(x,t)$ 在 $\bar{g}_2$ 内负的最小值不可能在 $\bar{k}_2$ 中达到; 另一方面, 由于 (2.23),

$$l_3 h|_{S_3}=D\zeta_0 l_3 z>0,$$

因此,根据热流方向定理知, $h(x,t)$ 在 $\bar{g}_2$ 内的负的最小值不可能在 S_3 上达到. 总之, $h(x,t)$ 的负的最小值一定在 S_2 上

达到.

因为 $z|_{S_2}=A$，所以，在 h 取 S_2 上负的最小值处 $p_0(x_0, t_0)$，w_2 取正的最大值，它亦是 w_1 在 $\bar{g}_1$ 内的正的最大值：

$$w_2(p_0)=w_1(p_0)=w(p_0).$$

显然，此时，$t_0>0$. 根据热流方向定理，

$$\left.\frac{\partial w_2(p_0)}{\partial x}\right|_{S_{2+}}<0;\qquad \left.\frac{\partial w_1(p_0)}{\partial x}\right|_{S_{2-}}>0,$$

这时，由 (2.14) 看出，在 p_0 处，

$$\left|\delta_1(t_0)\left.\frac{\partial w_1(p_0)}{\partial x}\right|_{S_{2-}}\right|<\zeta_0,\qquad \left|\delta_2(t_0)\left.\frac{\partial w_2(p_0)}{\partial x}\right|_{S_{2+}}\right|<\zeta_0. \tag{2.25}$$

另一方面，$h(x, t)$ 在 p_0 处达到其在 $\bar{g}_2$ 中的负的最小值，按热流方向定理，

$$\left.\frac{\partial h(p_0)}{\partial x}\right|_{S_{2+}}>0,$$

即

$$D\zeta_0\left.\frac{\partial z(p_0)}{\partial x}\right|_{S_{2+}}>\left.\frac{\partial w_2(p_0)}{\partial x}\right|_{S_{2+}}.$$

由此，根据 (2.21) 得到

$$\left|\left.\frac{\partial w(p_0)}{\partial x}\right|_{S_{2+}}\right|>\frac{\zeta_0}{\delta},$$

所以，在 p_0 处应有

$$\left|\delta_2(t_0)\left.\frac{\partial w(p_0)}{\partial x}\right|_{S_{2+}}\right|\geqslant\delta\left|\left.\frac{\partial w(p_0)}{\partial x}\right|_{S_{2+}}\right|>\zeta_0,$$

此与 (2.25) 矛盾. 矛盾是由反证假定引起的. 因此，(2.24) 在 $\bar{g}_2$ 内恒成立，由此得证引理 1.

ii) **引理 2** 设 $v=(v_1, v_2)$ 为下述带间断系数的抛物型方程的属于 $\bar{B}^{(2,\lambda)}(\bar{g})$ 的解：

$$
(\mathrm{IV})\begin{cases}
L_1 v_1 = 0, & (x, t) \in g_1; \quad (2.26)\\
L_2 v_2 = 0, & (x, t) \in g_2; \quad (2.27)\\
v_i(x, 0) = 0, & x \in k_i, \quad i = 1, 2; \quad (2.28)\\
[v]|_{s_2} = \xi(t), & t \in l; \quad (2.29)\\
\left[\delta \dfrac{\partial v}{\partial x}\right]\Big|_{s_2} = 0, & t \in l; \quad (2.30)\\
l_j v_i|_{s_j} = 0, & j = 2i-1,\ i = 1, 2,\ t \in l; \quad (2.31)
\end{cases}
$$

此时，对 v 下述先验估值成立:

$$
v_0 = \max_i \max_{\bar{g}_i} |v_i(x, t)| = O(\|\xi\|_{C^{(1,\frac{1}{2})}(l)}), \qquad (2.32)
$$

上式右端的 O 与 v_i 及 ξ 无关.

证明: 由 (2.28) 和 (2.29) 看出，

$$
\xi(0) = 0;
$$

从 (2.28), (2.26) 和 (2.27) 可以得到

$$
\xi'(0) = \frac{d\{[v]|_{s_2}\}}{dt}\Big|_{t=0} = 0.
$$

这样，下述光滑系数抛物型方程的边值问题在 $B^{(2,\lambda)}(\bar{g}_2)$ 中是协调的:

$$
(\mathrm{V})\begin{cases}
L_2 \bar{v}_2 = 0, & (x, t) \in g_2;\\
\bar{v}_2(x, 0) = 0, & x \in k_2;\\
\bar{v}_2|_{s_2} = \xi(t), & t \in l;\\
l_3 \bar{v}_2|_{s_3} = 0, & t \in l;
\end{cases}
$$

根据本部分第二章第二节的结果，对问题 (V) 下列先验估值成立:

$$
(\bar{v}_2)_0 = \max_{\bar{g}_2} |\bar{v}_2(x, t)| = O(\xi_0), \qquad (2.33)
$$

同时，

$$
\max_{\bar{g}_2} \left|\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x}\right| = O(\|\xi\|). \qquad (2.34)
$$

现在，把问题 (IV) 的解写成和的形状:

$$v = z + \bar{v} = (z_1, z_2 + \bar{v}_2),$$

其中 $\bar{v}_2$ 为问题 (V) 的解. 这样, $z = (z_1, z_2)$ 满足下面的边值问题 (VI):

$$(\text{VI})\begin{cases} L_1 z_1 = 0, & (x,t) \in g_1; \\ L_2 z_2 = 0, & (x,t) \in g_2; \\ z_i(x, 0) = 0, & x \in k_i, i = 1,2; \\ [z]|_{s_2} = 0, & t \in l; \\ \left[\delta \dfrac{\partial z}{\partial x}\right]\Big|_{s_2} = -\delta_2 \dfrac{\partial \bar{v}_2}{\partial x}\Big|_{s_{2+}}, & t \in l; \\ l_j z_i|_{s_j} = 0, \quad j = 2i-1, i = 1, 2, & t \in l; \end{cases}$$

根据估值 (2.34), 按引理 1 可写

$$z_0 = \max_i \max_{\bar{g}_i} |z_i(x,t)| = O\left(\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left|\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x}\right|_{s_{2+}}\right|\right)$$

$$= O\left(\max_{\bar{g}_2} \left|\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x}\right|\right) = O(\|\xi\|).$$

因此, 再考虑到 (2.33), 最后得到

$$v_0 \leqslant z_0 + (\bar{v}_2)_0 = O(\|\xi\|_{(1\frac{1}{2})}),$$

即证得 (2.32).

iii) **估值 (2.8) 的证明.**

现在, 我们应用引理 1 和 2 证明估值 (2.8). 为此设法简化问题 (I).

令

$$d_i = \varphi_i(\psi_2(0)), \qquad i = 1, 2; \tag{2.35}$$

$$e_i = a_i(\psi_2(0), 0)\varphi_i''(\psi_2(0)) + \psi_2'(0)\varphi_i'(\psi_2(0)) - f_i(\psi_i(0), 0); \; i = 1, 2, \tag{2.36}$$

考虑下面两个光滑系数的抛物型方程的边值问题:

$$
\text{(VII)}\begin{cases}
a_1(x,t)\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}-\dfrac{\partial y_1}{\partial t}=f_1(x,t), & (x,t)\in g_1;\\
y_1(x,0)=\varphi_1(x), & x\in k_1;\\
y_1|_{s_2}=d_1t+e_1, & t\in l;\\
l_1y_1|_{s_1}=\chi_1(t), & t\in l;
\end{cases}
$$

$$
\text{(VIII)}\begin{cases}
a_2(x,t)\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial y_2}{\partial t}=f_2(x,t), & (x,t)\in g_2;\\
y_2(x,0)=\varphi_2(x), & x\in k_2;\\
y_2|_{s_2}=d_2t+e_2, & t\in l;\\
l_3y_2|_{s_3}=\chi_2(t), & t\in l.
\end{cases}
$$

不难验证，由于 d_i 和 e_i 的选择，问题（VII）和（VIII）分别在 $B^{(2,\lambda)}(\bar g_1)$ 和 $B^{(2,\lambda)}(\bar g_2)$ 中是协调的. 因此，根据本部分第二章第二节的讨论，对它们下述先验估值成立：

$$
y_{i0}=\max_{\bar g_i}|y_i(x,t)|=O(\|f_i\|+\|\varphi_i\|+\|\chi_i\|),\quad (2.37)
$$

$$
\max_{\bar g_i}\left|\frac{\partial y_i}{\partial x}\right|=O(\|f_i\|+\|\varphi_i\|+\|\chi_i\|),\qquad (2.38)
$$

（2.37）、（2.38）右端诸模数依条件M决定之.

现设

$$
R_i=u_i-y_i,
$$

则 R_i 满足下述边值问题：

$$
\text{(IX)}\begin{cases}
L_1R_1=0, & (x,t)\in g_1;\\
L_2R_2=0, & (x,t)\in g_2;\\
R_i(x,0)=0, & x\in k_i,\ i=1,2;\\
[R]|_{s_2}=\xi-[y]|_{s_2}=\bar\xi, & t\in l;\\
\left[\delta\dfrac{\partial R}{\partial x}\right]\Big|_{s_2}=\zeta-\left[\delta\dfrac{\partial y}{\partial x}\right]\Big|_{s_2}=\bar\zeta, & t\in l;\\
l_jR_i|_{s_j}=0,\quad j=2i\quad 1,\ i=1,2, & t\in l;
\end{cases}
$$

此后，再写

$$R_i = w_i + v_i, \qquad i = 1, 2,$$

此处 w_i 为当 $\zeta = \bar{\zeta}$ 时的问题 (II) 的解，v_i 为当 $\xi = \bar{\xi}$ 时的问题 (IV) 的解.

这样，我以可应用引理 1 和引理 2 于 w_i 及 v_i，从而获得它们的最大模的先验估值，再考虑到 (2.37) 和 (2.38)，就可以证明 (2.8) 的正确性. 这里，我们不详细讨论了.

综上所述，我们把问题 (I) 的解写成问题 (IX) 的解及问题 (VII) 和 (VIII) 的解之和，再把问题 (IX) 的解写成问题 (II) 和问题 (IV) 的解之和，然后，又把问题 (IV) 之解写成问题 (V) 及 (VI) 之解之和. 这样，我们把问题 (I) 分解为两个带间断系数的边值问题及三个光滑系数方程的边值问题，在此过程中，使所有的边值问题在 $\bar{B}^{(2,\lambda)}(\bar{g})$ 或在 $B^{(2,\lambda)}(\bar{g}_i)$ 中保持协调性.

注： 当 L_i 为一般带有"低阶项"的抛物型方程时，即

$$L_i u = a_i u_{xx} - u_t + b_i u_x + c_i u = f_i$$

时，估值 (2.8) 仍成立，此时要假定 b_i 及 c_i 属于 $B^{(0,\lambda)}(\bar{g}_i)$ 类，而且，在 $\bar{g}_i$ 内 $c_i < 0$，$i = 1, 2$

附录一　强极值原理的证明

强极值原理　设区域 g 为 (x, t) 平面上由两条不相交的曲线 S_1 及 S_2 和两条直线 $t=0$ 及 $t=T$ 所界的曲边梯形. 若 g 上的热传导函数 $u(x, t)$ 在 g 某内点 $p_0=(x_0, t_0)$ 处达到最大值

$$\max_{\bar{g}} u = u(x_0, t_0) = M, \qquad (x_0, t_0) \in g,$$

(或最小值　$\min\limits_{\bar{g}} u = u(x_0, t_0) = m$) 则

$$u(x, t)|_{t<t_0} \equiv M (u|_{t<t_0} \equiv m), (x, t) \in g_0$$

为证明强极值原理, 需要对函数 u 在 p_0 附近的情况进行深入细致的分析. 这个证明较长, 在讨论三个辅助引理后, 我们再用反证法证明强极值原理.

引理 1　设在任一平面区域 g 内

$$Lu = u_t - u_{xx} < 0 \qquad (\text{或} > 0),$$

则函数 $u(x, t)$ 的最大值(或最小值)不能在 g 内出现.

证明:

若有 $P_0 \in g$ 使

$$\max_{\bar{g}} u = u(P_0) = M,$$

则在 P_0 处

$$u_x = 0, \qquad u_{xx} \leqslant 0, \qquad u_t \geqslant 0,$$

因而

$$Lu|_{P_0} \geqslant 0,$$

这与引理假设矛盾! 类似地证明最小值的情形.

引理 2　设 $u(x, t)$ 为任一平面区域 g 上的热传导函数,

在 g 内某点 $P_0=(x_0, t_0)$ 达到最大值

$$\max_{\bar{g}} u = u(P_0) = M(\text{或最小值} \min_{\bar{g}} u = u(P_0) = m).$$

若有一边界为 Γ 的圆 c，使 $P_0 \in \Gamma$和在 c 内

$$u(P) < u(P_0), \qquad (u(P) > u(P_0)), \qquad P \in c,$$

则此圆中心横坐标必为 $x = x_0$，即 P_0 点或为圆 c 的最高点，或为圆 c 的最低点.

证明:

不妨设 Γ 上只有唯一的一点 P_0，使

$$u(P) < u(P_0)$$

在 $\bar{c}$ 内除 P_0 点外恒成立，否则，可做一在 P_0 点内切于圆 c 的小圆来代替圆 c. 其次，还可假设坐标中心在 c 的圆心处，并只讨论 max 的情形.

我们用反证法证明引理 2. 如果 P_0 点不是 c 的最高点或最低点，那么，则可以 P_0 为心做一圆 $c_1 \in g$，使其边界 Γ_1 与 t 轴不相交.

讨论辅助函数

$$v = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2},$$

R 为 c 的半径，$\alpha > 0$，$r^2 = x^2 + t^2$.

显然，在 c 内 $v > 0$; 在 $\bar{c}$ 外 $v < 0$; 在 Γ 上 $v|_\Gamma = 0$; 当 α 足够大时，在 c_1 内可使

$$Lv = -e^{-\alpha r^2}(4\alpha^2 x^2 + 2\alpha t - 2\alpha) < 0,$$

这是因为 c_1 与 t 轴不相交，当 α 足够大时，上面的关于 α 的二次多项式中 $4\alpha^2 x^2$ 为主项.

再讨论辅助函数

$$w = u + \varepsilon v, \qquad \varepsilon > 0.$$

因为在 c_1 内 $Lv < 0$，$Lu = 0$，所以，在 c_1 内，$Lw<0$. 当选择 ε 足够小时，可使 $w|_{\Gamma_1} < M$.

事实上，记 Γ_1 在 $\bar{c}$ 内的部分为 Γ_1'，由于在 c 内 $u(P_0)>$

$u(P)$ 和 Γ_1' 为一闭集，故有 $\delta > 0$ 使

$$u|_{\Gamma_1'} < M - \delta.$$

当 ε 足够小时，可使 $\varepsilon v < \delta$，因而 $w|_{\Gamma_1'} < M$；在 $\Gamma_1 - \Gamma_1'$ 上，$v < 0$，故 $w|_{\Gamma_1 - \Gamma_1'} < M$.

在 P_0 点 $v = 0$，因之 $w(P_0) = u(P_0) = M$，即 w 只在 c_1 的内点 P_0 处取最大值，然而，在 c_1 内 $Lw < 0$，这与引理 1 相矛盾. 所以，P_0 点必是圆 c 的最高点或最低点.

推论：从上述证明中容易看出，如果 c 不是圆而是椭圆，那么引理 2 仍成立，即 P_0 应为椭圆 c 的上顶点或下顶点.

引理 3 设热传导函数 u 在任一区域 g 的内点 P_0 上取得最大值

$$\max_{\bar{g}} u = u(P_0) = M \qquad (\text{或最小值} \min_{\bar{g}} u = u(P_0) = m),$$

则在 $\bar{g}$ 内

$$u|_{t=t_0} = M \qquad (u|_{t=t_0} = m).$$

证明：

我们仍使用反证法. 设在 $\bar{g}$ 内直线段 $t = t_0$ 上有某点 Q，使 $u(P_0) > u(Q)$. 由于 u 的连续性，$\{u(P_0) = M\}$ 为一闭集，Q 点到此集之距离大于零，因而在 P_0 和 Q 间可找到第一个点 P_1，使在 P_1 和 Q 间恒有

$$u(P) < u(P_0) = u(P_1).$$

记 O' 为 P_1Q 之中点. 不等式

$$u(P) < u(P_1) = M \qquad (*)$$

可在过 O' 垂直于 PQ 的某小闭直线段 AB 上恒成立，此处 $AO' = BO'$.

现过 AB 做半轴为 $AB/2$ 的椭圆，当其第二半轴充分小时，由 u 的连续性推得，不等式 (*) 可在此椭圆上恒成立. 此后，保持椭圆第一半轴 $AB/2$ 不动，我们不断加大第二半轴，使椭圆逐渐“膨胀”. 不难想像，在这种“膨胀”的过程中，迟早

能在某椭圆 E 上找到一点 P'，使 $u(P')=u(P_1)$.（至迟可取通过 ABP_1Q 的椭圆为 E，这时可选 P_1 为 P'；但是，P' 完全可能提前在某一个第二半轴小于 $P_1Q/2$ 的椭圆上找到.）显然，$P'\neq A$，$P'\neq B$.

这时，我们得到：热传导函数 u 在 $P'\in g$ 处取最大值，而在椭圆 E 上，$u(P)<u(P')=M$，并且，P' 为 E 的边界点.根据引理 2，P' 必为 E 的上顶点或下顶点. 但是，上面已经证明 $P'\neq A$，$P'\neq B$. 这种矛盾是由于反证假设引起的. 于是，引理 3 得证.

下面，我们借助这三个引理用反证法证明强极值原理.

强极值原理的证明.

由于 $\bar{g}$ 中 $t\leqslant t_0$ 部分为有限闭集，它可以为矩形有限复盖，所以，不妨设 P_0 是 $\bar{g}$ 内某矩形 D 的上底边的一个内点，而证明 u 在 D 内取常数值 M. 其次，不妨设 D 的两边为坐标轴.

若强极值原理不成立，那么，在 D 内必能找到一点 P_1，使

$$u(P_1)<u(P_0)=M.$$

这时，由于 u 的连续性，必能在直线段 P_1P_0 上找到第一个点 Q，使 $u(Q)=M$ 和 $u(P)<u(Q)$ 在 $\overline{P_1Q}$（包括 P_1，不包括 Q）上恒成立.

经 P_1 和 Q 引两条平行矩形 D 的上底边的直线，它们与 D 的两侧边相交后构成新的矩形 D_1.（见图三）根据引理 3，在 D_1 的上底边 $u\equiv M$. 现在证明，在 D_1 的内部 $u<M$.

事实上，设有一点 $P_2\in D_1$ 使 $u(P_2)=M$. 这时，过 P_2 引平行于 x 轴的直线. 根据引理 3，u 在这条直线属于 g 的部分上取常数值 M. 然而，此直线必与 P_1Q 相交，相交处 u 仍取 M 值，这与假定 Q 为直线段 P_1P_0 上第一个使 u 取 M 值的点相矛盾. 所以，在整个 D_1 内部 $u<M$.

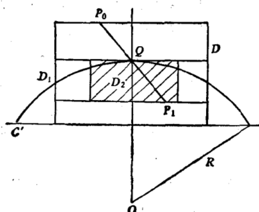


图 三

$$u < M.$$

根据 u 的连续性，我们可在 D_1 内做一更小的矩形 D_2，使 D_1 的上下底边的一部分为 D_2 的上下底边，并且，在 D_2 内部及其下底边和侧边上 $u < m$，而在其上底边 $u = M$.

现在，保持坐标轴方向不变，把坐标原点移到 Q 下方，使 Q 的坐标为 $Q = (O, R)$.

在圆 c

$$R^2 - x^2 - t^2 = 0$$

内讨论辅助函数

$$v = R^2 - x^2 - t^2.$$

显然，在 c 内 $v > 0$；在 c 的边界 c' 上 $v = 0$；当 R 足够大时，在 $\overline{D}_2$ 内

$$Lv = 2 - 2t < 0.$$

记 D_2 与 c 之交集为 E，其边界为 Γ. 在 $\overline{E}$ 内再讨论辅助函数

$$w = u + \varepsilon v, \qquad \varepsilon > 0.$$

显然，在 $\overline{E}$ 内 $Lw < 0$. 根据引理 1，w 在 $\overline{E}$ 上的最大值只能在 Γ 上达到. Γ 是由两部分组成的：一部分是 c' 的一段

弧，在这段弧上 $v\equiv 0$，u 的最大值即 w 的最大值在 Q 处达到，$w(Q)=u(Q)=M$，在除 Q 的其它点处 $w<M$；另一部分 Γ 是 D_2 的边界，在这些地方 $u<M$，然而，u 是连续的，故在这部分 Γ 上 $u<M-\delta$，$\delta>0$ 为一正数，因此，可取 ε 充分小，使在这些地方 $\varepsilon v<\delta$，这样，在这些地方 $w<M$。所以，当 ε 足够小时，w 只在 Q 点达到其在区域 $\bar{E}$ 上的最大值：

$$\max_{\bar{E}} w=\max_{\Gamma} w=w(Q)=u(Q)=M.$$

这时，在 Q 点应有

$$\frac{\partial w}{\partial t}\geqslant 0,$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t}\geqslant 0,$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t}\geqslant 2\varepsilon t>0;$$

另一方面，因 u 在 Q 处取最大值，故

$$u_{xx}|_Q\leqslant 0.$$

这样，

$$Lu|_Q=u_t|_Q-u_{xx}|_Q>0.$$

这与 u 为热传导函数的假定相矛盾.

强极值原理证毕.

附录二 泛函分析的一些基础知识

§1 巴拿赫空间

(1) 线性空间

设M为一元素集合，x和y为M的任意两个元素，a为任意实数. 如果能在M内定义元素的加法运算$x+y$和元素的数乘运算ax，使$x+y$和ax仍为M的元素，并且，加法运算和数乘运算满足下列七项规律：

1) $x+y=y+x$;

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$;

3) $a(x+y)=ax+ay$;

4) $(a+b)x=ax+bx$;

5) $a(bx)=(ab)x$;

6) $1x=x$;

7) 若$x+y=x+z$，则$y=z$;

(其中z为M的任意元素，b为实数)则称M为一线性空间.

任何线性空间中，所有元素与数“0”的乘积都是此空间中同一个元素，它被称为零元素θ.

(2) 赋范空间

如果线性空间M中任意元素x按一定法则均能与一非负实数$\|x\|$相对应，同时，

1) $\|\theta\|=0$，且当$x\neq\theta$时，$\|x\|>0$;

2) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$;

3) $\|ax\|=|a|\|x\|$,

(其中y为M的元素，a为实数)则称M为一赋范空间，$\|x\|$称

为 x 的范数或模(数).

若线性空间M有两种赋范方法A和B，使对M的任意元素x均成立

$$k_1\|x\|_B \leqslant \|x\|_A \leqslant k_2\|x\|_B,$$

并且，正常数 k_1、k_2 与 x 无关，则称 $\|x\|_A$ 和 $\|x\|_B$ 为M中的两个等价范数.

(3) 巴拿赫空间

设 $\{x_n\}$ $(n=1,2,3\cdots)$ 为线性赋范空间M的元素 x_n 所组成的无穷序列. 若有 $x_0\in M$，使得当 $n\to\infty$ 时，

$$\|x_n - x_0\| \to 0, \qquad (n\to\infty)$$

则称 x_0 为序列 $\{x_n\}$ 的极限，记作

$$x_0 = \lim_{n\to\infty}\{x_n\}.$$

不难看出，当

$$x_0 = \lim_{n\to\infty}\{x_n\}$$

时，对任给 $\varepsilon>0$，必能找到相应的 N，使

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon, \qquad m, n \geqslant N. \tag{2.1}$$

如果序列 $\{x_n\}$ 满足条件 (2.1)，则称其为M中之基本序列. 显然，M中任何有极限的序列均是基本序列；反之，M中的基本序列不一定都在M中有极限.

若线性赋范空间中任何基本序列的极限仍属于该空间，则称此空间为**完备空间**.

完备的线性赋范空间称为**巴拿赫空间**.

§2 算子

今后，除特别声明外，我们只讨论巴氏空间. 设有两个巴氏空间M及M'. 若有一对应A，使M中任一元素x与M'中确定的元素x'相对应，即

$$x' = Ax,$$

则称 A 为由 M 作用到 M' 的一个算子，或称 A 为定义在 M 中的一个算子.

设 x 和 y 为空间 M 中任意两个元素，a 为任意实数，A 为定义在 M 中的一个算子. 若

$$A(x+y) = Ax + Ay,$$

$$A(ax) = a(Ax),$$

则称 A 为可加算子.

若算子 A 满足关系式

$$x = Ax,$$

则称 A 为恒等算子，并记为 E.

如果算子 A 所建立的 M 与 M' 中元素的对应

$$x' = Ax \tag{2.2}$$

是相互一一的，即当 $x_1 \neq x_2$ 时，

$$Ax_1 = x_1' \neq x_2' = Ax_2.$$

这时，可以讨论由 (2.2) 所确定的 M' 的元素 x' 与 M 的元素 x 的对应关系 A^{-1}，即

$$x = A^{-1}x',$$

它称为 A 的逆算子. 显然，当 A 为可加算子时，A^{-1} 亦为可加算子.

设 A 和 B 为定义在空间 M 中的两个算子，a 为任意实数，x 为 M 中的元素. 算子的加法与数乘定义如下：

$$(A+B)x = Ax + Bx,$$

$$(aA)x = a(Ax).$$

设 A 为由空间 M 作用到 M' 的算子，B 为由 M' 作用到 M'' 的算子. 算子 A 和 B 的乘法定义为

$$(BA)x = B(Ax),$$

积算子 BA 由 M 作用到 M''. 容易看出，当 A 和 B 均为可加

算子时，则 BA 亦为可加算子. 显然,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

此外，不难验证，算子乘法满足结合律及分配律:

$$(AB)C = A(BC),$$
$$A(B + C) = AB + AC.$$

设 A 为由空间 M 作用到空间 M' 的算子，x 为 M 中的元素，若

$$\sup_{x \in M} \frac{\|Ax\|_{M'}}{\|x\|_M}$$

为一有限数，则称其为算子 A 的模，并记作 $\|A\|$. 这里 $\|x\|_M$ 表示在空间 M 中取模，$\|Ax\|_{M'}$ 表示在空间 M' 中取模.

当算子 A 有模时，可写

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|.$$

§3 压缩映象原理及其推论

定理(压缩映象原理) 设 A 为由巴拿赫空间 M 作用到 M 的有模算子，若

$$\|A\| < 1,$$

则 M 中有唯一的元素 $\bar{x}$ 满足关系式

$$A\bar{x} = \bar{x},$$

而且，$\bar{x}$ 是序列

$$\{x_{n+1} = Ax_n\} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

的极限，其中元素 x_1 是 M 中任意一个元素. $\bar{x}$ 称为算子 A 的不动点.

证明:

因为

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leqslant \|A\|\|x_n - x_{n-1}\|,$$

所以,

$$\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant \|A\|^{n-1}\|x_2-x_1\|. \qquad (n=1,2,3\cdots)$$

这时，

$$\begin{aligned}\|x_m-x_n\| &\leqslant \|x_{n+1}-x_n\|+\|x_{n+2}-x_{n+1}\|+\cdots \\ &\quad +\|x_m-x_{m-1}\| \\ &\leqslant \|A\|^{n-1}(1+\|A\|+\cdots+\|A\|^{m-n-1})\|x_2-x_1\| \\ &\leqslant \frac{\|A\|^{n-1}}{1-\|A\|}\|x_2-x_1\|.\end{aligned}$$

由于 $\|A\|<1$，故 $\{x_n\}$ 为一基本序列. 另一方面，从M的完备性知，有 $\bar{x}\in M$，使

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\bar{x}.$$

这时，在等式

$$x_{n+1}=Ax_n$$

两端取极限得

$$\bar{x}=A\bar{x},$$

即证明了 $\bar{x}$ 为算子A的不动点.

现在证明不动点是唯一的. 设另有一不动点 $\bar{\bar{x}}$:

$$\bar{\bar{x}}=A\bar{\bar{x}}.$$

这时，

$$\|\bar{\bar{x}}-\bar{x}\|=\|A\bar{\bar{x}}-A\bar{x}\|\leqslant\|A\|\|\bar{\bar{x}}-\bar{x}\|,$$

即

$$(1-\|A\|)\|\bar{\bar{x}}-\bar{x}\|=0,$$

因此，

$$\|\bar{\bar{x}}-\bar{x}\|=0,$$

即 $\bar{\bar{x}}-\bar{x}=\theta$，由此推得 $\bar{\bar{x}}$ 与 $\bar{x}$ 重合.

注：从上述证明过程中可见，若算子A满足条件

$$\|Ax_1-Ax_2\|\leqslant\alpha\|x_1-x_2\|,$$

其中 $0<\alpha<1$，x_1 和 x_2 为M中任意两个元素，则对算子A可应用压缩映象原理.

推论 设A为由巴拿赫空间M作用到M的算子，并且：

$$\|A\| < 1.$$

这时，$E + A$有逆算子$(E + A)^{-1}$.

事实上，对任意给定的元素$y \in M$讨论方程

$$y = x + Ax$$

或者

$$x = y - Ax,$$

它的解确定了逆算子$(E + A)^{-1}$. 记

$$Bx = y - Ax,$$

则当y给定后，可对算子B应用压缩映象原理. 实际上，设x_1和x_2为M中任意两个元素，有

$$\|Bx_1 - Bx_2\| = \|Ax_1 - Ax_2\| \leqslant \|A\|\|x_1 - x_2\|.$$

这时，根据压缩映象原理知，算子B有唯一的不动点$\bar{x} \in M$，使

$$B\bar{x} = \bar{x},$$

即

$$y - A\bar{x} = \bar{x},$$

或者

$$y = \bar{x} + A\bar{x}.$$

y和$\bar{x}$的对应关系确定了$E + A$的逆算子.

参 考 文 献

[1] 吴新谋,数学物理方程,科学出版社, 1958.

[2] 关肇直,泛函分析讲义,高等教育出版社, 1958.

[3] Gevrey, M., Sur les equations aux derivées partielles du type parabolique, *J. Math. Pures et appl.*, **9** (1913), No. 1—4, 305—471.

[4] Nirinberg, L., A Strong maximum Principle for Parabolic equations, *Comm. on Pure and appl. Math.*, **6**(1953), No. 2, 167—177.

[5] Ciliberto, C., Formule di maggiorazione e teoremi di esitenza persoluzioni delle equazioni Paraboliche in due variabili, *Ricerche math.*, **3** (1954), 40—75.

[6] Выборны, Р., О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений параболического типа, *ДАН* **117**(1957), №4, 563—565.

[7] Миранда, К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, Изд-во ин. лит., 1957.

[8] Friedman, A., Boundary estimates for Second order Pavabolic equation and their applications, *J. of math. and mec.*, **7** (1958), No. 5, 771—790.

[9] Камынин, Л., О гладкости теплотого потенциала, *Диф, ур.*, **1**(1965), №6, 798—840.

[10] Л. Камынин и Химченко, О принципе максимума для параболических уравнеиий второго порядка, *ДАН*, **200**(1971), №2, 282—285.

[11] Тихонов, А., Обратные задаии теплопроводности, *Инж. Физ. Ж.*, **29** (1975), №1, 7—12.

[12] 王 潼,二阶椭圆型方程的主要基本解及比较函数的广义位势,苏联科学院报告, **152** (1963), No. 6, 1288—1291.

[13] 王 潼,热势的直接值及热势论的一个逆问题,苏联"计算数学和数学物理杂志", **4** (1964), No. 4, 660—670.

[14] 王 潼,带间断系数的二阶椭圆型方程的边值问题的解的估值,苏联"计算数学和数学物理杂志", **4** (1964), No. 3, 577—579.

[15] 王 潼,热势论,苏联科学院报告, **161** (1965), No.3, 507—510.

[16] 王 潼,曲线热势的光滑性,苏联"计算数学和数学物理杂志", **5** (1965), No. 3, 474—487.

[17] 王 潼,面热势的光滑性,苏联"计算数学和数学物理杂志", **5** (1965), No. 4, 658—666.

[18] 王 潼,二阶椭圆型方程比较函数的广义位势的直接值的增滑作用,苏联"微分方程"杂志, **2** (1966), No. 2, 266—294.